ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK
11. Band, Heft 1 UND IHRE GRENZGEBIETE S. 1—48

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Carnap, Rudolf: Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik. Mh. Math. Phys. **41**, 263—284 (1934).

In dieser Arbeit zieht Verf. die Konsequenzen, welche sich aus der Konstruktion formal unentscheidbarer Sätze für das Problem der Antinomien zweiter Art (z. B. Epimenides) ergeben, nämlich die folgenden: Der logische Fehler dieser Antinomien liegt nicht in der Selbstbezogenheit gewisser in ihnen auftretender Begriffe und Sätze (diese Selbstbezogenheit kommt ja z. B. auch den erwähnten unentscheidbaren Sätzen zu), sondern in der Verwendung des Begriffes „wahr". D. h. genauer, es wird fälschlich angenommen, man habe einen Begriff $\mathfrak{W}$ (wahr) von der Art, daß für jeden Satz A die Formel $\mathfrak{W}(„A") \equiv A$ (1) beweisbar ist. Aus dem Zustandekommen der Antinomien kann man schließen, daß es einen solchen Begriff $\mathfrak{W}$ in keiner widerspruchsfreien Sprache geben kann. Man kann zwar jede Sprache so erweitern, daß sie einen Begriff $\mathfrak{W}$ enthält, der (1) für alle Sätze A der ursprünglichen Sprache befriedigt, nicht aber so, daß (1) auch für die Sätze der erweiterten Sprache gelten würde. Jedes formale System ist also in zweifacher Hinsicht unvollständig: 1. insofern, als es darin unentscheidbare Sätze gibt, 2. insofern, als es Begriffe gibt, die sich darin nicht definieren lassen (z. B. $\mathfrak{W}$ oder die nach dem Diagonalverfahren konstruierten Zahlenfolgen). So kommt man zu dem Schluß, daß, obwohl alles Mathematische formalisierbar ist, doch nicht die ganze Mathematik in einem formalen System formalisiert werden kann, eine seit jeher vom Intuitionismus behauptete Tatsache. — Ein zweiter Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Paradoxie der abzählbaren Modelle der Mengenlehre und präzisiert die übliche Auflösung dieser scheinbaren Paradoxie in dem Sinne, daß je zwei Mengen der axiomatischen Mengenlehre syntaktisch (d. h. in einer geeigneten Metasprache) gleich mächtig sind, nicht aber innerhalb des ursprünglichen Systems. — Bezüglich der Antinomien zweiter Art und des Wahrheitsbegriffs wurde die gleiche Auffassung von A. Tarski in Anz. Akad. Wiss., Wien **1932**, Nr 2; dies. Zbl. 4, 1; ferner in Travaux Soc. Sci. Varsovie **1933**, Nr 34 und in Studia Phil. **1** vertreten. *K. Gödel* (Wien).

MacLane, Saunders: A logical analysis of mathematical structure. Monist **45**, 118 bis 130 (1935).

Als Ansatz zu einer Analyse der Struktur von mathematischen Beweisen betrachtet der Verf. 1. verschiedene Methoden der Zerlegung eines Beweises in Teile, die je ein zusammenhängendes Ganzes bilden; 2. einige mögliche Motivierungen der einzelnen Beweisschritte (z. B.: „If the conclusion of a theorem contains some element not involved in the hypothesis, then try to eliminate this element"). *A. Heyting.*

Hetper, W.: Semantische Arithmetik. C. R. Soc. Sci. Varsovie **27**, 9—26 (1934).

Diese semantische Begründung (vgl. z. B. Erkenntnis **3**, 367; dies. Zbl. 7, 385) der Arithmetik der rationalen Zahlen (die übrigen reellen Zahlen verlangen ein Hinausgehen über die „elementare Semantik") wird zunächst inhaltlich diskutiert, sodann in formaler Gestalt vorgeführt. — Die im Mittelpunkt der Begründung stehende Definition der natürlichen Zahl, deren Vorteile gegenüber den üblichen Begründungen des Zahlbegriffs in der Einleitung hervorgehoben werden, sei kurz skizziert. Die elementare Semantik geht aus von der Definition: „0 ist ein Ausdruck; sind E und F Ausdrücke, so ist $*EF$ ein Ausdruck." Als fundamentaler Begriff erscheint $\{EF\}$ (der Ausdruck F kommt im Ausdruck E vor). Indem ${}_1E$ als Abkürzung für $*0E$ dient, wird nun die Eigenschaft „E ist natürliche Zahl" in semantisch formalisierter Weise

interpretiert als Abkürzung des Urteils: für alle n folgt aus $\{E\,_1 n\}$ stets $\{_1E\,_{11}n\}$ (di
Zahlenreihe stellt sich somit dar als die Reihe der Ausdrücke 0, *00, *0*00, *0*0*00, ...
Arnold Schmidt (Göttingen).

Rosser, J. B.: A mathematical logic without variables. I. Ann. of Math., II. s. 36 127—150 (1935).

This is the first part of a rewriting of the reviewer's thesis (Amer. J. Math. 52 see also this Zbl. 1, 261) so as to conform to certain ideas of A. Church (Ann. o Math., II. s. 33; see this Zbl. 4, 145). The principal points of deviation from the cite thesis are: (1) The combinator K is dispensed with the combinators considered, whic are combinations of B, C, W, and I only, are defined in terms of two primitive ones and J. (2) The formula $BI = I$ is not proveable. (3) Identity is taken as a define notion, rather than as a primitive one. (4) No formulas of universal generality ar proveable; for example, in order to prove for a given x that $x = x$ holds, it is necessar to prove first some other formula involving x. (5) The rules are restated so that it i not possible to derive any formulas of type $\vdash x$ from the rules alone without the us of previously proved (or assumed) formulas of the same type. The present part of th investigation concerns, on the one hand, the fundamental properties of combinators an of equality and, on the other hand, the theorems on the relation between combinator and combinations, by means of which a kind of consistency is established. In th former case rather radical changes are made necessary by the above considerations in the latter case the results are proved by a new method. *H. B. Curry.*

Kleene, S. C.: A theory of positive integers in formal logic. I. Amer. J. Math. 57 153—173 (1935).

This is Part I of a development of the theory of positive integers along the line indicated by A. Church [Ann. of Math. 34, 863 (1933); see this Zbl. 8, 289]. In thi theory the integer n is defined to be the operation which transforms a function $f(x$ into its n-th iterate; the various arithmetical functions are similarly defined in term of operations transforming expressions; and it is expected that the properties of posi tive integers can be derived from this basis by means of a suitable logical symbolism In that case it would follow, if the operations concerned are regarded as belonging to logic, that the positive integers can be defined in purely logical terms. In the presen paper the development is carried, on the basis of a part of Church's formalism whic does not involve negation, far enough to include the following topics: the propertie of equality; the Peano postulates (except the one involving negation), principles o proof by mathematical induction; and the elementary properties of addition, multi plication, exponentiation, number dyads and triads, subtraction (defined so tha $x - y = 1$ if $y > x$), order, the lesser and greater of two positive integers, and func tions $\varepsilon(x, y)$ and $\delta(x, y)$ which $=1$ when $x \leqq y$ or $x \neq y$ respectively, otherwise $= 2$ As in the case of a previous paper by the same author (see this Zbl. 10, 146) it is ex pected that this paper will be a step in establishing a certain inconsistency of the portion of Church's system used; on the other hand the intuitive interpretations o the formal implications proved are unaffected by this inconsistency. *H. B. Curry.*

Tarski, Alfred: Zur Grundlegung der Booleschen Algebra. I. Fundam. Math. 24 177—198 (1935).

Als Prototyp der „gewöhnlichen" Booleschen Algebra wird das aus dem Axiomen system von Couturat (L'algèbre de la logique, 1905) fließende Satzsystem zugrunde gelegt; die Hinzunahme einiger Axiome über die unendliche Addition und Multiplika tion (die den Axiomen über die gewöhnliche Addition und Multiplikation in bestimmter Weise analog sind) führt auf die „erweiterte Boolesche Algebra" des Autors. In § 1 werden zwei kürzere Axiomensysteme angegeben, die dem erweiterten Axiomensystem $(\mathfrak{A}_{1-10})$ äquivalent sind. § 2 beschäftigt sich mit dem Schröderschen Begriff (Vorl. üb. d. Algebra der Logik, Bd. II) des Individuums (Element $\neq 0$, das außer sich selbst keine Elemente $\neq 0$ enthält), vom Autor als Atomelement bezeichnet. Es

wird gezeigt, daß die Annahme, jedes Element enthalte ein Atomelement, im Rahmen der Axiome $\mathfrak{A}_{1-10}$ einer Reihe weitgehender Sätze äquivalent ist, so z. B. dem Satze, jedes Element sei die Summe der in ihm enthaltenen Atomelemente, und den allgemeinsten distributiven Gesetzen für die unendliche Addition und Multiplikation. — Den Abschluß bildet ein Äquivalenzsatz, der die „atomistische Boolesche Algebra" zur Mengenlehre in Beziehung setzt. *Arnold Schmidt* (Göttingen).

Rössler, Karel: Beweis der Widerspruchsfreiheit des Funktionenkalküls der mathematischen Logik. Sonderdruck aus: Mém. Soc. Roy. sci. Bohême 7 S. (1934).

Der vom Autor in § 1 unternommene Versuch einer Kürzung des Hilbert-Ackermannschen Funktionenkalkuls (Grundzüge der theoretischen Logik, 1928) beruht auf einer Nichtbeachtung des Unterschiedes zwischen Aussagevariablen und beliebigen Ausdrücken. In § 2 wird ein von Hilbert für einen weiteren Bereich verwandtes Widerspruchsfreiheitsverfahren in den engeren Rahmen des Funktionenkalkuls übersetzt, wobei allerdings die vermeintliche Kürzbarkeit benutzt wird. (Die Angabe, daß die Widerspruchsfreiheit dieses Funktionenkalkuls bereits im Hilbert-Ackermannschen Buche einfacher bewiesen ist, fehlt.) *Arnold Schmidt* (Göttingen).

Ackermann, Wilhelm: Zum Eliminationsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. **111**, 61—63 (1935).

In seinen „Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik" (Math. Ann. **110**; dies. Zbl. **9**, 386) löste Ackermann das Eliminationsproblem für den Fall, in dem auf das Seinszeichen des zu eliminierenden Prädikates lauter Allzeichen (pränex) folgen. Auf diesen Fall ließ sich der allgemeine durch Einführung von Belegungsfunktionen zurückführen, welche aber ihrerseits nur in speziellen Fällen eliminierbar sind. Der Autor gibt nun noch eine andere spezielle Zurückführungsmethode an, die sich auf die (offenbar ein Auswahlprinzip in sich schließende) Äquivalenz

$$(EF)(x)\mathfrak{A}_c(Fxc, x) \longleftrightarrow (x)(EG)\mathfrak{A}_c(Gc, x)$$

gründet (c ist hier Abkürzungszeichen für alle Terme, die in $\mathfrak{A}$ als zweites Argument eines F auftreten). Diese Methode hat gegenüber der erstgenannten u. a. den Vorteil, daß der Umfang ihrer Anwendbarkeit ersichtlich ist. *A. Schmidt* (Göttingen).

Péter, Rózsa: Konstruktion nichtrekursiver Funktionen. Math. Ann. **111**, 42—60 (1935).

Diese Arbeit betrifft die Existenz von nichtrekursiven zahlentheoretischen Funktionen, wo eine Funktion dann und nur dann als rekursiv bezeichnet wird, wenn sie aus 0 und $n+1$ durch eine endliche Kette von Substitutionen und Rekursionen von der Form $\Phi(0, a) = \alpha(a)$, $\Phi(n+1, a) = \beta(n, a, \Phi(n, a))$, gewonnen werden kann. In einer früheren Arbeit (Math. Ann. **110**, 612—632; dies. Zbl. **10**, 241) hat Verf. gezeigt, wie allgemeinere Rekursionen, die nach einer Variablen fortschreiten, sich auf die obige Form zurückführen lassen. Hier wird bewiesen: 1. daß man zur selben Klasse von Funktionen auch so gelangen kann, daß man nur Rekursionen ohne Parameter, und zwar von der Form

$$\Phi(0) = 1, \quad \Phi(n+1) = \gamma(n, \Phi(n))$$

zuläßt, dafür aber auch einige zweistellige Funktionen als Ausgangsfunktionen hinzunimmt; 2. daß schon die zweifache Rekursion, die gleichzeitig nach zwei Variablen fortschreitet, aus der Klasse der rekursiven Funktionen hinausführt. Zum letzten Ergebnis werden zwei Beispiele angegeben: das erste wird aus einer Abzählung der rekursiven Funktionen durch ein Diagonalverfahren erzeugt; das zweite ist eine Vereinfachung des Ackermannschen Beispiels (Math. Ann. **99**, 118—133), das stärker wächst als jede rekursive Funktion. *H. B. Curry* (State College, Pennsylvania).

Kalmár, László: Über einen Löwenheimschen Satz. Acta Litt. Sci. Szeged **7**, 112 bis 121 (1934).

Für den Löwenheimschen Satz, daß man zu jedem Zählausdruck $\mathfrak{A}$ einen binären $\mathfrak{B}$ angeben kann, so daß $\mathfrak{A}$ dann und nur dann allgemeingültig ist, wenn $\mathfrak{B}$ es ist, wird

ein einfacherer Beweis gegeben ($\mathfrak{B}$ heißt binär, wenn es nur zweistellige Funktionsvariable enthält). $\mathfrak{B}$ wird aus $\mathfrak{A}$ konstruiert, indem die Funktionszeichen $F_\lambda(x_1\, x_2 \dots x_{r_\lambda})$ aus $\mathfrak{A}$ ($\lambda = 1, 2, \dots l$) durch die Formeln

$$(u)[H_1(x_1 u) \mathbin{\&} H_2(x_2 u) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} H_{r_\lambda}(x_{r_\lambda} u) \rightarrow G_\lambda(u)]$$

ersetzt werden. Es wird gezeigt, daß, falls für $\mathfrak{B}$ bekannt ist, für Individuenbereiche welcher Mächtigkeiten es allgemeingültig ist, dieselbe Frage auch für $\mathfrak{A}$ entschieden werden kann, ferner daß man, falls ein Beweis für $\mathfrak{B}$ aus den Axiomen des engeren Funktionenkalküls vorgelegt ist, einen solchen Beweis auch für $\mathfrak{A}$ konstruieren kann.

K. Gödel (Wien).

Algebra und Zahlentheorie.

Parker, W. V.: The degree of the highest common factors of two polynomials. Amer. Math. Monthly 42, 164—166 (1935).

Abason, Ernest: Sur un théorème de M. D. Pompeïu. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 4, 94—96 (1933).

Durch einen falschen Schluß in § 3 erhält Verf. den Satz: „Soit AB l'arc de la courbe représentative d'un polynôme quelconque, relatif à l'intervalle (a, b); la droite, parallèle à la corde AB, et qui a la même moyenne dans cet intervalle que l'arc du polynôme considéré, rencontre toujours l'arc AB en deux points, dont les abscisses sont comprises dans l'intervalle considéré, et, séparées par son milieu", in welchem die letzte Behauptung evidentermaßen nicht notwendig zutrifft. *Karamata.*

Varopoulos, Th.: Über den Betrag von Wurzeln von Polynomen. Bull. Soc. Math. Grèce 15, Nr 3, 3—10 (1935) [Griechisch].

Unter anderem werden die folgenden Sätze bewiesen: p und m seien natürliche Zahlen, $1 \leqq p \leqq m$. Betrachtet werden die Polynome

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_{p-1} z^{p-1} + \cdots + z^m,$$

für die die Beträge $|\alpha_0|, |\alpha_1|, \dots, |\alpha_{p-1}|$ eine feste Schranke M nicht übertreffen. Diese Polynome haben entweder alle ihre Wurzeln innerhalb des Kreises $|z| \leqq 1 + M$ oder mindestens p Wurzeln innerhalb des Kreises $|z| \leqq 2$. — Werden unter den gleichen Voraussetzungen über p und m diejenigen Polynome betrachtet, deren erste p Koeffizienten dem Betrage nach die Einheit nicht übertreffen, während unter den übrigen Koeffizienten einer genau gleich 1 ist, so haben diese stets mindestens p Wurzeln innerhalb eines Kreises mit einem allein von den Zahlen p und m abhängenden Radius $R(m, p)$. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Szökefalvi Nagy, Gyula: Über algebraische und transzendente Gleichungen. Mat. természett. Értes. 52, 36—51 u. dtsch. Zusammenfassung 52—53 (1935) [Ungarisch].

Es sei $f(z)$ eine reelle ganze Funktion vom Geschlechte 0 oder 1 und $\gamma > 0$. Es wird die Lage der kritischen Punkte von $F(z) = e^{-\gamma z^2} f(z)$ untersucht; das sind die Punkte $\xi + i\eta$, für welche

$$\frac{1}{2i\eta}\left\{\frac{F'}{F}(\xi + i\eta) - \frac{F'}{F}(\xi - i\eta)\right\} \geqq 0$$

ist (für $\eta = 0$ ist dieser Ausdruck durch seinen Grenzwert zu ersetzen). Verf. beweist u. a.: Ist $x_0 \pm i y_0$ ein komplexes Nullstellenpaar und hat der entsprechende (offene) Jensensche Kreis keine gemeinsamen Punkte mit den anderen Jensenschen Kreisen, so liegen die in K enthaltenen kritischen Punkte auf derjenigen Seite der Hyperbel

$$3(x^2 - x_0^2) - y^2 + y_0^2 - \frac{1}{\gamma} = 0,$$

an welcher das Punktepaar $x_0 \pm i y_0$ liegt. Weiterhin werden Gebiete betrachtet, welche von bizirkularen Kurven begrenzt werden. Schließlich untersucht Verf. die Nullstellen der Ableitung eines reellen Polynoms, das zwei vorgeschriebene konjugiert komplexe Nullstellenpaare mit gegebener Multiplizität besitzt. *Szegö* (St. Louis).

Church, Randolph: Tables of irreducible polynomials for the first four prime moduli. Ann. of Math., II. s. **36**, 198—209 (1935).

Der Verf. gibt Tabellen aller modulo p irreduziblen Polynome n-ten Grades für die Werte $p = 2 (n \leqq 11)$, $p = 3 (n \leqq 7)$, $p = 5 (n \leqq 5)$ und $p = 7 (n \leqq 4)$. Für jedes Polynom ist der Wert des kleinsten Exponenten e angegeben, für welchen $x^e - 1$ durch dieses Polynom modulo p teilbar ist. *N. Tschebotaröw* (Kasan).

● **Verriest, G.: Évariste Galois et la théorie des équations algébriques.** Paris: Gauthier-Villars 1934. 58 S.

Eine populäre, der Erklärung der Rolle von Galois in der Theorie der Radikallösung von algebraischen Gleichungen gewidmete Monographie (Separatum aus Questions scientifiques, Mai-Juli 1934). Sie ist für Leser („interlocuteur") von ganz niedrigem Niveau der mathematischen Bildung bestimmt, und es scheint dem Ref., daß der Verf. seine methodische Aufgabe glänzend geschickt gelöst hat. — Zunächst wird eine Biographie von Galois angegeben, in der der Verf. trefflich die Haupttatsachen des Lebens von Galois markiert, die seinen Charakter gebildet und seinen weiteren tragischen Lebenslauf bestimmt haben. Es wird auch über das Schicksal seiner Manuskripte ziemlich ausführlich berichtet. — Dann beschreibt der Verf. das Werk der Vorgänger von Galois: Tartaglia, Ferrari, Ruffini, Abel. — Weiter wird eine Unterscheidung zwischen den allgemeinen und den besonderen Gleichungen definiert und an Beispielen erläutert. — Dann folgt der Abschnitt über die Bedeutung von Radikallösungen. Verf. sieht ihre Bedeutung darin, daß das Radikal die einfachste mehrdeutige Funktion ist und daß es der sehr einfachen Funktionalgleichung $\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(xy)$ genügt. Er war der Bestimmung des Buches zufolge nicht in der Lage, den modernen Gesichtspunkt auseinanderzusetzen, nach welchem die Radikallösung darum von Wichtigkeit ist, weil das Radikal Funktion nur einer Veränderlichen ist, und daß aus dieser Auffassung eine heutige Erweiterung des Problems entstand, die man Klein-Hilbertsches Resolventenproblem nennt. Es wird auch nichts über den „Casus irreducibilis" gesagt. Der folgende Abschnitt ist der Lagrangeschen Theorie und der Erklärung der Begriffe der Substitution und der Resolventenbildung gewidmet. — Der folgende Abschnitt über die Galoissche Theorie ist höchst interessant. Verf. erklärt an mehreren einfachen Beispielen den Begriff und die Haupteigenschaften der Galoisschen Gruppe. Seine Auffassung der Galoisschen Gruppe als Maß der Ununterscheidbarkeit („indiscernabilité") von Wurzeln ist besonders bemerkenswert. — Weiter wird der Begriff der auflösbaren Gruppen (durch Kompositionsreihen) definiert und ihr Zusammenhang mit den auflösbaren Gleichungen angedeutet und an einem Beispiel erläutert. — Zum Schluß wird eine Erläuterung über praktische Auffindung der Galoisschen Gruppe und über die Durchführung der Radikallösung beigefügt. — Über die Rolle der zyklischen Gleichungen (Lagrangesche Resolventen) und über Typen auflösbarer Gleichungen wird natürlich nichts ausgesagt. *N. Tschebotaröw* (Kasan).

Misra, D. P.: The extension of algebraic numbers. Tôhoku Math. J. **40**, 66—75 (1935).

Ein bekannter Satz: „Eine Wurzel einer Gleichung $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$ mit algebraischen Zahlen als Koeffizienten ist eine algebraische Zahl" wird vom Verf. folgendermaßen verallgemeinert: Ist $\varphi(x)$ eine algebraische Funktion mit algebraischen Zahlen als Koeffizienten, so ist jede Wurzel von $\varphi(x) = 0$ eine algebraische Zahl. — Der Verf. vermeidet die übliche Definiton der algebraischen Funktion $y = \varphi(x)$ als einer Wurzel der Gleichung $A_0(x)\,y^m + A_1(x)\,y^{m-1} + \cdots + A_m(x) = 0$, wobei die $A_i(x)$ rationale Funktionen mit algebraischen Zahlen als Koeffizienten sind [daraus wäre es möglich, den Satz ganz einfach zu beweisen, daß aus $\varphi(x) = 0$ auch $A_m(x) = 0$ folgt]. Er betrachtet mehrere Spezialfälle, die auf Polynome mit gebrochenen Exponenten zurückgeführt werden können, aber keineswegs den allgemeinen Fall erschöpfen. — Es ist dem Ref. nicht verständlich, was der Verf. unter dem Zweig der mehrdeutigen Funktion $y = \varphi(x)$ versteht. Sind aber im Begriffe $y = \varphi(x)$ alle Zweige enthalten, so sind die Gleichungen $\varphi(x) = 0$ und $A_m(x) = 0$ vollständig äquivalent. *N. Tschebotaröw* (Kasan).

Tschebotaröw, N.: Kurzer Beweis des Diskriminantensatzes. Acta Arithmet., Warszawa **1**, 78—82 (1935).

Mittels einfacher Sätze der Hilbert-Galoisschen Theorie und des ersten Sylowschen Satzes gibt Verf. einen sehr kurzen Beweis des Diskriminantensatzes: Es sei $p|\Delta$, wo p eine rationale Primzahl und Δ die Diskriminante des algebraischen Körpers k ist;

$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ sei die Basis von k und K der kleinste Normalkörper, welcher k enthält. Es sei $V = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_m$ das Produkt aller voneinander verschiedenen Primidealteiler von p innerhalb K. Der folgende Hilfssatz bildet den Ausgangspunkt des Beweises: „Besitzt das System $\omega_\alpha^{(i)} \xi_\alpha + \cdots + \omega_\beta^{(i)} \xi_\beta \equiv 0 \pmod{V}$ ($\omega_\alpha^{(i)}$ die entsprechende Konjugierte von ω_α, $i = 0, 1, \ldots, n-1$) eine Lösung $[\xi_\alpha, \ldots, \xi_\beta]$, in welcher ξ_α nicht durch V teilbar ist, so besitzt es auch eine Lösung $[\eta_\alpha, \ldots, \eta_\beta]$, in welcher η_α zu p relativ prim ist.“ Nimmt man $\beta = r$ als möglichst klein an, so wird die genannte Lösung (mod V) einzig sein, inbesondere wird $\eta_v T \equiv \eta_v \pmod{V}$ sein, wo T eine beliebige Substitution der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von K ist. Nun sei $H = 1 + S_2 + \cdots + S_\pi$, $\pi = p^s$ die p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$. Ist $\eta_v^{p^f} \equiv \eta_v \pmod{\mathfrak{P}_i}$, wo f durch den verallgemeinerten Fermatschen Satz bestimmt ist, so ist bei ganzem rationalem q, so daß $l = qf - s > 0$

$$(\eta_v \cdot \eta_v S_2 \cdot \ldots \cdot \eta_v S_\pi)^{p^l} \equiv \eta_v^{p^s \cdot p^{qf-s}} \equiv \eta_v^{p^{qf}} \equiv \eta_v \pmod{V}.$$

Wir können also $\eta_v \equiv \tau_v \pmod{V}$ setzen, wobei τ_v gegenüber H invariant ist. Aus $\mathfrak{G} = H + HT_2 + \cdots + HT_a$ ergibt sich $a \cdot \tau_v \equiv \tau_v + \tau_v T_2 + \cdots + \tau_v T_a$. Demnach kann man $[a\eta_1, a\eta_2, \ldots a\eta_r] = [a\eta_1, x_2, \ldots x_r]$, wo $x_2, \ldots x_r$ ganz rational sind. Ist $p | V^e$, so folgt aus $V | \alpha$, wo $\alpha = a\eta_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_r\omega_r$, daß $p | \alpha^e$, wobei $p \nmid \alpha$. *Lubelski* (Warschau).

● **Iyanaga, S.: Sur les classes d'idéaux dans les corps quadratiques. (Actualités scient. et industr. Nr. 197. Exposés math. publiés à la mémoire de Jacques Herbrand. VIII.)** Paris: Hermann & Cie. 1935. 13 S. Frcs. 5.—.

Es wird der Zusammenhang zwischen den Zerlegungen der Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers und den durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe unabhängig von den inzwischen erschienenen Resultaten von Rédei und Reichardt (dies. Zbl. **7**, 396 und **9**, 51) behandelt. Wie bei Rédei und Reichardt wird der absolute Klassenkörper zu den Beweisen herangezogen, doch verlaufen diese im übrigen anders und werden mit Hilfe einiger Lemma über den Zerfall von Primidealen in Zwischenkörpern vereinfacht. Der oben erwähnte Zusammenhang wird in der folgenden Weise formuliert: Wenn die Idealklassengruppe (im engeren Sinn) eines quadratischen Zahlkörpers $P(\sqrt{D})$ mit D als Diskriminante α durch 4 teilbare Invarianten besitzt, so ist die Anzahl der Zerlegungen $D = D_1 D_2$ mit der Eigenschaft, daß die Primfaktoren der Diskriminante von $P(\sqrt{D_1})$ in $P(\sqrt{D_2})$ vollständig zerfallen und umgekehrt, gleich $2^\alpha - 1$ oder $2(2^\alpha - 1)$, je nachdem $D \equiv 1$ oder $\equiv 0$ (4) ist. Daß die Existenz einer solchen Zerlegung von D für das Auftreten einer Klasse der Ordnung 4 notwendig und hinreichend ist, hat Rédei [Math. u. Nat. Anz. Ung. Akad. **48** (1931)] bewiesen. — Für die Frage nach Bedingungen für das Vorzeichen der Norm der Grundeinheit in $P(\sqrt{D})$ beweist Verf.: Wenn D keinen Faktor $\equiv 3$ (4) hat und keine Zerlegung $D = D_1 D_2$ von der oben angeführten Art gestattet, so ist $n\varepsilon < 0$. Dies gilt z. B. für alle $D = p_0 p_1 \ldots p_s$, wo $\left(\frac{p_0}{p_i}\right) = -1$, $\left(\frac{p_i}{p_j}\right) = +1$ $(i, j = 1, \ldots, s)$. Da für jedes s Primzahlen existieren, welche diesen Bedingungen genügen und diese Körper dann keine Idealklasse der Ordnung 4 besitzen, folgt gleichzeitig die Existenz von quadratischen Körpern, deren 2-Klassengruppe den Typus $(2, 2, \ldots, 2)$ und beliebig hohen Rang hat. *Taussky* (Bryn Mawr, Pa.).

Moriya, Mikao: Eine Bemerkung über die Klassenzahl der absoluten Klassenkörper. Proc. Imp. Acad. Jap. **10**, 623—625 (1934).

Es wird bewiesen, daß die Klassenzahl des absoluten Klassenkörpers eines algebraischen Zahlkörpers k nur dann zu einer gegebenen Primzahl l prim sein kann, wenn der Rang der l-Klassengruppe von k kleiner ist als $r + 2$, wobei r die Anzahl der Grundeinheiten in k bedeutet. Für jedes l gibt es zyklische Körper über dem Körper der rationalen Zahlen, deren l-Klassengruppe einen Rang $> l + 1$ hat (Moriya, dies. Zbl. 7, 295—296); daher existieren für jedes l Körper, deren absoluter Klassenkörper eine durch l teilbare Klassenzahl hat. *Taussky* (Bryn Mawr, Pa.).

Albert, A. Adrian: A note on the Poincaré theorem on impure Riemann matrices. Ann. of Math., II. s. **36**, 151—156 (1935).

Rein algebraischer Beweis der Hauptsätze über Riemannsche Matrizen ω mit komplexen Koeffizienten und rationaler Grundmatrix C. 1. (Satz von Poincaré-

Scorza.) Eine halbreduzible Riemannsche Matrix ist vollreduzibel. 2. (Analogon des Schurschen Lemmas.) Zwei verkettete Riemannsche Matrizen ($\alpha \omega_1 = \omega_2 A$; $\alpha \neq 0$ komplexe, $A \neq 0$ rationale Matrix) sind isomorph. 3. (Satz von Scorza.) Jede Riemannsche Matrix ist vollreduzibel in eindeutig bestimmte, irreduzible (sog. reine) Riemannsche Matrizen. 4. Die Multiplikationsalgebra einer reinen Riemannschen Matrix ist eine Divisionsalgebra; die Multiplikationsalgebra A einer beliebigen Riemannschen Matrix ω ist halbeinfach, die einfachen Bestandteile A_i von A entsprechen den verschiedenen irreduziblen Bestandteilen ω_i von ω, die Reihenzahlen bei der Darstellung der A_i als Matrixalgebren über Divisionsalgebren sind gleich den Vielfachheiten der ω_i in ω. — In einer kurz vorher erschienenen Arbeit hat H. Weyl die ihm bereits bekannten Albertschen Beweise für diese Hauptsätze noch weiter vereinfacht [Ann. of Math. **35**, 714ff. (1934); dies. Zbl. **10**, 100f.]. *Hasse* (Göttingen).

Fitting, Hans: Primärkomponentenzerlegung in nichtkommutativen Ringen. Math. Ann. **111**, 19—41 (1935).

Diese Arbeit überträgt einen großen Teil der von Ref. im Kommutativen entwickelten „allgemeinen Idealtheorie" aufs Nichtkommutative. Grundlage dieser Übertragung ist die Definition der einseitigen Prim- und Primärideale vermöge des Automorphismenrings der Restklassenmoduln: Ein Ideal heißt prim, wenn im Automorphismenring ein Produkt zweiseitiger Ideale nur verschwindet, wenn ein Faktor verschwindet — primär, wenn ein Faktor verschwindet oder der andere im Radikal liegt, das selbst prim ist. Dieselben Forderungen, für Elemente statt Ideale ausgesprochen, ergeben die vollständigen Prim- und Primärideale. Die Definitionen lassen sich auch vermöge des Oreschen „Eigenrings" erbringen; das ist der größte Unterring, in dem das gegebene Ideal zweiseitig ist; der Automorphismenring wird dem Restklassenring vom Eigenring nach dem Ideal isomorph. Damit ist der Zusammenhang mit der Definition im Kommutativen gegeben. Wie im Kommutativen folgt: Jedes irreduzible Ideal, für dessen Restklassenmodul der Teilerkettensatz gilt, ist vollständig primär. Der Beweis kommt auf eine Verallgemeinerung der Peirceschen Zerlegung hinaus, gibt auch im Kommutativen neue Einsicht in das Beweisschema. Hieraus ergibt sich dann unter Voraussetzung des Teilerkettensatzes die Zerlegung der Ideale in primäre bzw. vollständig primäre. Setzt man „Doppelkettensatz" im Restklassenmodul voraus, so übertragen sich auch die Eindeutigkeitssätze. Nur tritt jetzt Operatorisomorphie an Stelle der absoluten Eindeutigkeit, entsprechend den Zerlegungssätzen für Gruppen mit Operatoren; insbesondere handelt es sich um Anwendung des Krull-Schmidtschen Zerlegungssatzes. Schließlich werden die Bedingungen für absolute Eindeutigkeit untersucht; insbesondere ergibt sich, daß eindeutige Zerlegung in teilerfremde zweiseitige Primärkomponenten dann und nur dann besteht, wenn alle Primideale vertauschbar sind, ein von Krull [Math. Z. **28** (1928)] auf anderem Wege abgeleitetes Resultat. Dieses Resultat läßt Anwendungen auf die Idealtheorie in Ordnungen von Algebren zu; insbesondere ist die Vertauschbarkeitsbedingung für den ganzzahligen Gruppenring einer p-Gruppe erfüllt. *E. Noether.*

Taussky: Abstrakte Körper und Metrik. I. Endliche Mengen und Körperpotenzen. Erg. math. Kolloqu. H. **6**, 20—23 (1935).

Ist P ein Körper der Charakteristik 0, so heißt die Menge R ein P-Raum, wenn jedem Punktepaar p, q aus R eine Zahl pq aus P als ihr Abstand zugeordnet ist, so daß $pq = qp$ und $pp = 0$ gelten. Ist der P-Raum R eindeutig und abstandstreu auf eine Teilmenge des P-Raumes R' abbildbar, so heißt R in R' einbettbar. Schließlich sei P_n der Raum aller n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ von Zahlen aus P mit der Abstandsdefinition: $(x_i)(y_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$. — In Verallgemeinerung von Ergebnissen von K. Menger (Math. Ann. **100**, 134) und A. Wald [Erg. math. Kolloqu. H. **5**, 34 (1933); dies. Zbl. **7**, 361] gilt dann: I. Dann und nur dann existiert zu jedem endlichen P-Raum E ein n, so daß E in den P_n einbettbar ist, wenn P nicht formal-reell ist. Ist insbesondere

-1 in P Summe von $m > 0$ Quadraten, so ist jeder n-punktige P-Raum in den $P_{(n-1)m+\binom{n}{2}}$ einbettbar (die Voraussetzung, daß 0 die Charakteristik von P ist, ist übrigens zum Beweis von I. überflüssig). II. Sei in P jedes Element Quadrat; dann ist jeder $(n+1)$-punktige P-Raum in den P_n einbettbar und ein P-Raum, der mehr als $n+3$ Punkte enthält, ist dann und nur dann in den P_n einbettbar, wenn je $n+3$ seiner Punkte es sind; für Einbettbarkeit $(n+2)$- und $(n+3)$-punktiger P-Räume ist das Verschwinden gewisser Abstandsdeterminanten notwendig und hinreichend.
Reinhold Baer (Manchester).

Jacobson, N., and O. Taussky: Locally compact rings. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **21**, 106—108 (1935).

As a generalisation of theorems of L. Pontrjagin, E. R. van Kampen and D. van Dantzig, the authors prove the following theorems: Theorem I. A locally compact and separable (not necessarily associative or commutative) field F is either a hypercomplex system over the real field or is totally disconnected. — Theorem III. A locally compact, separable and connected (not necessarily associative or commutative) ring R which contains no absolute zero-divisor (i. e. an element c such that $cR = Rc = 0$) is a hypercomplex system over the real field. *D. van Dantzig* (Delft).

Analytische Zahlentheorie:

Skopin, J.: Über die Verteilung der Bruchteile für ein System ganzer Polynome. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 4, 547—559 u. dtsch. Zusammenfassung 559—560 (1934) [Russisch].

J. Vinogradow [Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. 585—600 (1926); 567—578 (1927)] hat die Frage nach der Verteilung von Bruchteilen der Werte eines Polynoms für ganzzahlige Werte der Variablen mit Restabschätzung erledigt. Dieselbe Aufgabe hat R. Kuzmin [J. Leningr. phys.-math. Ges. 2 (1929)] für die simultane Approximation von Werten mehrerer Polynome einer Veränderlichen zu vorgegebenen Bruchzahlen gelöst unter der wesentlichen Beschränkung, daß nur eines der gegebenen Polynome den maximalen Grad besitzt. — Der Verf. befreit sich von dieser Beschränkung, indem er die zweite (analytische) Vinogradowsche Methode etwas modifiziert. Der Einfachheit halber betrachtet er nur zwei Polynome gleichen Grades, deren Koeffizienten α, β der Glieder höchsten Grades durch keine Relation $\alpha u \pm \beta v = w$ mit rationalen u, v, w verbunden sein sollen. *N. Tschebotaröw* (Kasan).

Vinogradow, I.: A new evaluation of $G(n)$ in Waring's problem. C. R. Acad. Sci. URSS **4**, 249—251 u. engl. Text 251—253 (1934) [Russisch].

The result $G(n) \leqq n\,(6 \log n + 10)$ is proved in slightly more detail than in the announcement, C. R. Acad. Sci., Paris **1935**, 182—184; see also this Zbl. **10**, 9 and 391. *G. Pall* (Montreal).

Watson, G. N.: Über Ramanujansche Kongruenzeigenschaften der Zerfällungsanzahlen. I. Math. Z. **39**, 712—731 (1935).

Verf. beweist unter Zuhilfenahme elliptischer Funktionen, daß, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, x^n = x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24},$$

$\tau(n)$ für fast alle n durch 691 teilbar ist. Dieser Satz war bereits von Ramanujan ohne Beweis gefunden worden. Ist nämlich $\sigma_s(n)$ die Summe der s-ten Potenzen der Teiler von n, so gilt

$$\sigma_{11}(n) \equiv \tau(n) \pmod{691}.$$

Daß für jede Zahl $a > 0$ und $s > 0$, $s \equiv 1(2)$ die Funktion $\sigma_s(n)$ durch a für fast alle n teilbar ist, folgert Verf. aus der folgenden Verallgemeinerung eines Landauschen

Satzes: Es sei $(k, l) = 1$, $b_{n,k,l} = 0$ oder 1, je nachdem ob n durch die ungerade Potenz einer Primzahl $p \equiv l \pmod k$ teilbar ist oder nicht. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{x} b_{n,k,l} \sim \frac{A}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\varphi(k)}\right)} x (\log x)^{-\frac{1}{\varphi(k)}}.$$

Hans Heilbronn (Bristol).

Landau, Edmund: Verschärfung eines Romanoffschen Satzes. Acta Arithmet., Warszawa **1**, 43—61 (1935).

Es sei $a > 1$ ganz, $x > 0$, $R(x, a)$ die Anzahl der x nicht übersteigenden Zahlen, die sich als Summe einer Primzahl und einer Potenz von a darstellen lassen. Romanoff bewies:

$$\liminf_{x=\infty} \frac{1}{x} R(x, a) = r(a) > 0.$$

Verf. verschärft dies Resultat durch Verfeinerung der Beweismethode und erhält sogar

$$\lim_{a=\infty} r(a) \log a = 1.$$

Dies Resultat ist das beste seiner Art, da $\lim\limits_{a=\infty} \log a \limsup\limits_{x=\infty} \frac{1}{x} R(x, a) = 1$.

Hans Heilbronn (Bristol).

Landau, Edmund: Bemerkungen zum Heilbronnschen Satz. Acta Arithmet., Warszawa **1**, 1—18 (1935).

Es bezeichne $h(d)$ die Klassenzahl des imaginär-quadratischen Zahlkörpers der Diskriminante $d < 0$. Verf. verschärft den Satz, daß $h(d)$ mit $|d|$ gegen ∞ geht, und erhält folgendes Resultat: Ist h gegeben, so gilt für alle d mit $h(d) = h$ mit höchstens einer Ausnahme

$$|d| < P_1 h^8 \log^6 (3h),$$

wo P_1 eine absolute Konstante bezeichnet. *Hans Heilbronn* (Bristol).

Siegel, Carl Ludwig: Über die Klassenzahl quadratischer Zahlkörper. Acta Arithmet., Warszawa **1**, 83—86 (1935).

Verf. beweist: Ist $L_d(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) n^{-s}$ die zu dem quadratischen Charakter mod m gehörige L-Reihe, so ist

$$\log L_d(1) = o(\log |d|).$$

Hieraus folgt bekanntlich, wenn $h(d)$ die Klassenzahl im quadratischen Körper der Diskriminante d bezeichnet,

$$c(\varepsilon)\, |d|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} < h(d) < C(\varepsilon)\, |d|^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \text{für} \quad d < 0,\ \varepsilon > 0,$$

$$c(\varepsilon)\, d^{\frac{1}{2}-\varepsilon} < h(d) \log \eta_d < C(\varepsilon)\, d^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \text{für} \quad d > 0,\ \varepsilon > 0,$$

wo η_d die Fundamentaleinheit im Körper $P\sqrt{d}$ bezeichnet. — Der Beweis beruht auf folgendem Gedankengang: Da $L_d(1) = O \log |d|$ ist, genügt es, eine untere Schranke für $L_d(1)$ zu finden. Hecke bewies, und Verf. erhält dies ebenfalls mit seinen Methoden, daß $1 = O(L_d(1) \log |d|)$, falls 1 nicht Häufungspunkt reeller Nullstellen von L-Reihen ist, die quadratischen Charakteren entsprechen. — Aus der Heckeschen Integraldarstellung der Zetafunktion des Körpers $P(\sqrt{d}, \sqrt{D})$ [nämlich $\zeta(s)\, L_d(s)\, L_{dD}(s)\, L_D(s)$] leitet Verf. die für $\frac{1}{2} < s < 1$ gültige Ungleichung ab:

$$f(s)\, L_d(s)\, L_D(s)\, L_{dD}(s) \leqq |dD|^{1-s} L_d(1)\, L_D(1)\, L_{dD}(1) - c(1-s),$$

wo c eine positive absolute Konstante und $f(s)$ eine beschränkte Funktion ist. Ist nun $L_D(s) = 0$, so folgt

$$L_d(1) > \frac{c(1-s)\,|dD|^{s-1}}{L_D(1)\, L_{dD}(1)} > a(s, D) \frac{|d|^{s-1}}{\log |d|},$$

wo $a(s, D) > 0$ ist und nur von s und D abhängt. Da nach dem obengenannten Heckeschen Lemma D und s so gewählt werden können, daß s beliebig nahe an 1 liegt, folgt hieraus die Behauptung. *Hans Heilbronn* (Bristol).

Chowla, S.: An extension of Heilbronn's class-number theorem. J. Indian Math. Soc., N. s. **1**, 88—92 (1934).

Vgl. dies. Zbl. **10**, 152.

Gruppentheorie.

● **Baer, Reinhold: Automorphismen von Erweiterungsgruppen. (Actualités scient. et industr. Nr. 205. Exposés math. publiés à la mémoire de Jacques Herbrand. X.)** Paris: Hermann & Cie. 1935. 22 S. Frcs. 7.—.

$\mathfrak{N}$ sei eine Gruppe mit dem Zentrum $\mathfrak{Z}$, und $\mathfrak{G}$ sei eine Erweiterung von $\mathfrak{N}$ mittels der Gruppe C, d. h. es sei $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} = C$. Jede Restklasse von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$, d. h. jedes Element c von C definiert in $\mathfrak{N}$ eine Automorphismenklasse, wobei zwei Automorphismen zur selben Klasse gerechnet werden, wenn sie sich nur um einen inneren Automorphismus unterscheiden. Diese Klasse heiße $\chi(c)$. Der von den Elementen von $G = \mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{N}$ induzierte Automorphismus $\chi_g(\mathfrak{n})$ ($\mathfrak{n}$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{N}$) heiße der Charakter von G in $\mathfrak{N}$. α sei ein eigentlicher oder uneigentlicher Automorphismus von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{r}(g)$ sei ein ein für allemal fest gewähltes Repräsentantensystem der Restklassen von $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{G}$, d. h. der Elemente von G, und es werde $\alpha[\mathfrak{r}(g)]\,\mathfrak{r}(g)^{-1} = \mathfrak{c}(g)$ gesetzt, wobei $\mathfrak{c}(g)$ eine von α abhängige in G erklärte Funktion ist. $\mathsf{A}(\mathfrak{G}; C)$ bezeichne die Gesamtheit der α, die C elementweise fest lassen und $\mathfrak{Z}$ auf sich oder einen Teil von sich abbilden, $\mathsf{E}(\mathfrak{G}; C)$ bzw. $\mathsf{E}(\mathfrak{G}; \mathfrak{Z}, C)$ bezeichne die Gruppe der eigentlichen α, die $\mathfrak{Z}$ auf sich abbilden und C bzw. $\mathfrak{Z}$ und C elementweise fest lassen. Es wird zunächst untersucht, welchen Bedingungen $\mathfrak{c}(g)$ genügen muß, wenn α in $\mathsf{A}(\mathfrak{G}; c)$ bzw. $\mathsf{E}(\mathfrak{G}; C)$ liegt; sodann wird gezeigt, daß $c(g) = \mathfrak{n}\chi_g(\mathfrak{n}^{-1})$ stets von einem Automorphismus α aus $\mathsf{E}(\mathfrak{G}; \mathfrak{Z}, C)$ induziert wird. Induzieren umgekehrt alle α aus $\mathsf{E}(\mathfrak{G}; \mathfrak{Z}, C)$ Funktionen $c(g) = \mathfrak{n}\chi_g(\mathfrak{n}^{-1})$, so soll dieser Sachverhalt ausgesprochen werden in der Form: Für $\chi(c)$ gilt der H a u p t g e s c h l e c h t s s a t z. Diese Bezeichnung wird gerechtfertigt durch die Tatsache, daß $\mathsf{E}(\mathfrak{G}; \mathfrak{Z}, C)$ allein von $\chi(c)$ abhängt, und durch die folgenden Sätze: Ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}$ eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$, also $C = G$, $\chi(c) = \chi_g$ und C eine zyklische Gruppe Z, so gilt, wenn $\mathfrak{A}$ und Z beide endlich sind, für einen Charakter χ von Z in $\mathfrak{A}$ dann und nur dann der Hauptgeschlechtssatz, wenn jede χ realisierende Erweiterung von $\mathfrak{A}$ durch Z ein volles Repräsentantensystem von Z mit Gruppeneigenschaft besitzt; hieraus folgt, daß für $\chi(c)$ dann und nur dann der Hauptgeschlechtssatz gilt, wenn jedes Element von $\mathfrak{A}$, das bei Transformation mit allen z^i (z ein erzeugendes Element von Z) invariant bleibt, eine Norm ist, d. h. die Form $\prod_{i=0}^{n-1}\chi_{z^i}(\mathfrak{a})$ hat, wobei n die Ordnung von Z, $\mathfrak{a}$ ein Element aus $\mathfrak{A}$ ist. Ist Z unendlich, so darf es kein vom Einheitselement von $\mathfrak{A}$ verschiedenes invariantes Element in $\mathfrak{A}$ geben, wenn für χ der Hauptgeschlechtssatz gelten soll. Für unendliches $\mathfrak{A}$ sind die angegebenen Bedingungen nicht immer hinreichend. Für den Fall, daß $\mathfrak{A}$ endlich, aber $C = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ eine Abelsche Gruppe mit endlicher Basis, aber evtl. unendlicher Ordnung ist, werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angegeben, damit für einen C in $\mathfrak{A}$ realisierenden Charakter $\chi(c)$ der Hauptgeschlechtssatz gilt. *Magnus* (Princeton).

Miller, G. A.: Groups involving a set of as many conjugates as commutators. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **21**, 41—44 (1935).

Die Anzahl der in einer Klasse konjugierten Elemente einer Gruppe G enthaltenen Elemente kann nicht größer sein als die Ordnung h der Kommutatorgruppe H von G. Es existiert jedoch stets dann eine Klasse mit h Elementen, wenn H zyklisch oder von der Ordnung p^2 ist (p eine Primzahl) und wenn H im Zentrum von G enthalten ist und nicht mehr als zwei unabhängige Erzeugende besitzt. *Magnus* (Princeton).

Miller, G. A.: Sets of group elements involving only products of more than *n*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **21**, 45—47 (1935).

Eine Gruppe G möge erzeugt werden von einem System S von voneinander verschiedenen Elementen $s_1, s_2, \ldots, s_h$. Das Produkt von irgend 2, 3, ... oder n gleichen oder verschiedenen Elementen $s_1, s_2, \ldots, s_h$ möge nicht dem System S angehören, dagegen soll jedes Produkt von $n+1$ Elementen aus S wieder ein solches sein. Dann bilden die Produkte von je n Elementen aus S eine Gruppe H der Ordnung h, die in G als invariante Untergruppe vom Index n enthalten ist, und S ist eine Nebengruppe von H in G. *Magnus* (Princeton).

Wielandt, Helmut: Abschätzungen für den Grad einer Permutationsgruppe von vorgeschriebenem Transitivitätsgrad. Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin **2**, 149—174 (1934).

Unter wesentlicher Verschärfung der bisher bekannten Resultate von C. J o r d a n

[J. de math. (5) **1**, 60 (1895)] und M. J. Weiss [Trans. Amer. Math. Soc. **32**, 262 (1930)] wird bewiesen, daß für eine t-fach transitive Permutationsgruppe $\mathfrak{P}$ des Grades n, welche weder die alternierende noch die symmetrische Gruppe ist, die Ungleichung $n - t \geqq \binom{t}{[\frac{4}{5}t]}$ für jeden Wert von t gilt. Desgleichen gilt für alle t, daß $\log(n-t) > \frac{t}{3}$ ist, während für hinreichend große t sogar $\log(n-t) > \frac{t}{2}$ bewiesen wird, was bei Heranziehung anderer Methoden zu $\log(n-t) > 0{,}68\,t$ verbessert werden kann, wie ohne Beweis mitgeteilt wird. — Nach A. Bochert [Math. Ann. **40**, 192 (1892)] gilt, daß $\mathfrak{P}$, wenn mindestens vierfach transitiv, außer dem Einheitselement kein Element enthält, das mehr als $\frac{n}{2} + 1$ Symbole ungeändert läßt. Betrachtet man nun in $\mathfrak{P}$ diejenige Untergruppe $\mathfrak{G}$, welche die t Symbole $a_1, a_2, \ldots, a_t$ nach Art der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}$ des Grades t permutiert, so existiert in $\mathfrak{G}$ eine invariante Untergruppe $\mathfrak{N}$, so daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ isomorph mit $\mathfrak{A}$ ist. Zunächst wird nun der Fall untersucht, daß $\mathfrak{N}$ die Ordnung 1 hat. Es sei zunächst $\mathfrak{T}$ eine transitive Darstellung von $\mathfrak{A}$ in n Symbolen, und es gelte, daß die eines dieser Symbole fest lassende Untergruppe von $\mathfrak{A}$ genau eine alternierende Gruppe $\mathfrak{B}$ eines Grades k mit $5 \leqq k \leqq t$ als Untergruppe enthält; dann läßt die einem Dreierzyklus aus $\mathfrak{A}$ entsprechende Permutation aus $\mathfrak{T}$ mindestens $\frac{k(k-1)(k-2)}{t(t-1)(t-2)}\,n$ von diesen n Symbolen fest. Diese Anzahl ist $> \frac{1}{2}n$, wenn $k \geqq \frac{1}{5}(4t+1)$ und $t \geqq 7$ ist. Ist nun $N(t)$ der kleinste Index, den eine in $\mathfrak{A}$ enthaltene Untergruppe haben kann, welche keine alternierenden Untergruppen oder nur solche mit einem Grad $< \frac{1}{5}(4t+1)$ enthält, so läßt für $n < N(t)$ das Bild jedes Dreierzyklus von $\mathfrak{A}$ in der Darstellung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ mehr als die Hälfte der Symbole fest, und daraus folgt mittels des Satzes von Bochert für $\mathfrak{N} = 1$ leicht $n - 1 \geqq N(t)$. In ähnlicher Weise läßt sich der Fall erledigen, daß $\mathfrak{N}$ zum Zentrum von $\mathfrak{G}$ gehört, und schließlich wird gezeigt, daß dies notwendig der Fall ist, wenn kein von der Identität verschiedenes Element von $\mathfrak{N}$ mehr als $\frac{1}{2}n$ Symbole ungeändert läßt, und $n < n(t) = \min\left\{\binom{t}{k} N(k)\right\}$ für $\frac{1}{5}(4t+1) \leqq k \leqq t$ ist. Daraus folgt dann mittels des Satzes von Bochert $n - t \geqq n(t)$ für $t \geqq 8$. Schließlich wird gezeigt, daß $n(t) = \binom{t}{t'}$ mit $t' = [\frac{4}{5}t]$ für $t \geqq 11$, und für hinreichend großes t $n(t) = N(t)$ gilt. Damit ist der erste der eingangs bewiesenen Sätze für $t \geqq 11$ bewiesen; für $t < 11$ wird er direkt verifiziert.

Magnus (Princeton).

Casimir, H., und B. L. van der Waerden: Algebraischer Beweis der vollständigen Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher Liescher Gruppen. Math. Ann. **111**, 1—12 (1935).

The theorem stating that the continuous representations of a semi-simple group are completely reducible is equivalent to the pure algebraic theorem: A system of matrices M_k is completely reducible if the commutators $[M_i M_k]$ are equal to $\sum c^j_{ik} M_j$, where the c^j_{ik} are the constants of structure of a semi-simple Lie group. The authors give in the present paper for the first time a pure algebraic proof for this theorem. This proof is based on Cartan's method of „weights" combined with the study of Casimir's operator $\sum g^{ij} M_i M_j$ (cf. this Zbl. 2, 265) which commutes with all matrices of the system.

F. Bohnenblust (Princeton, N. J.).

Schreier, J., et S. Ulam: Sur le nombre des générateurs d'un groupe topologique compact et connexe. Fundam. Math. **24**, 302—304 (1935).

A propos d'un problème posé par eux (Fundam. Math. 13, 102—118) et d'un théorème de M. H. Auerbach [Studia Math. 5, 43—49 (1935)] les auteurs démontrent que, G étant un groupe topologique compact, connexe et métrisable, l'ensemble de tous les couples d'éléments (g_1, g_2) de G, tels que le sous-groupe (dénombrable) engendré par g_1 et g_2 n'est pas partout dense dans G, est de

première catégorie dans l'ensemble G^2 de tous les couples de G. La démonstration repose sur le théorème mentionné ci-dessus de M. Auerbach, et fait usage d'une représentation isomorphe de G par des matrices infinies, qui existe d'après J. v. Neumann (Ann. of Math. **34**, 170; ce Zbl. **6**, 300). — Les auteurs font aussi mention de ce qu'un groupe topologique compact, connexe et abélien est toujours monothétique au sens du réf. [Fundam. Math. **14**, 102—125 (1930); Math. Ann. **107**, 587—626 (1932); ce Zbl. **6**, 7]. *D. van Dantzig* (Delft).

Analysis.

Levin, V.: On some integral inequalities involving periodic functions. J. London Math. Soc. **10**, 45—48 (1935).

Eine Aufgabe von Golab aus dem Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **43**, *1* (1933) wird gelöst und in der folgenden Weise verallgemeinert: $f(x)$ sei positiv, π-periodisch, zweimal stetig differenzierbar und es sei $f(x) + f''(x) \geqq 0$. Dann gelten für die durch

$$J_\lambda^\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left\{1 + \frac{f''(x)}{f(x)}\right\}^\lambda dx$$

definierte Größe J_λ die Ungleichungen: $J_\lambda \leqq 1$ bzw. $\geqq 1$, je nachdem $0 \leqq \lambda \leqq \frac{1}{2}$ oder $1 \leqq \lambda < \infty$ ist. *Szegö* (St. Louis, Mo.).

Aumann, Georg: Über den Mischalgorithmus bei analytischen Mittelwerten. Math. Z. **39**, 625—629 (1935).

Die Arbeit hat den Zweck, die Untersuchungen von Geppert über die Iteration von analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen (dies. Zbl. **5**, 289; **6**, 296) in die vom Verf. begründete allgemeine Theorie der analytischen Mittelwerte (dies. Zbl. **9**, 173) einzuordnen. Es wird u. a. bewiesen: $M_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, M_n(z_1, \ldots, z_n)$ seien n in der Umgebung der Stelle $(a, \ldots, a)$ analytische Mittel. Führt man den Algorithmus $z_\nu^{(0)} = z_\nu$, $z_\nu^{(\lambda+1)} = M_\nu(z_1^{(\lambda)}, \ldots, z_n^{(\lambda)})$ für $\nu = 1, \ldots, n$; $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ durch, so ist $\lim_{\lambda\to\infty} z_\nu^{(\lambda)} = M(z_1, \ldots, z_n)$ vorhanden, von ν unabhängig und stellt in der Umgebung der Stelle $(a, \ldots, a)$ ein analytisches Mittel dar. Zwei Beispiele weisen auf das Problem hin, aus den analytischen Fortsetzungen und Verzweigungen von $M_1, \ldots, M_n$ zu schließen auf die von M. *B. Jessen* (Kopenhagen).

Knopp, Konrad: Über die maximalen Abstände und Verhältnisse verschiedener Mittelwerte. Math. Z. **39**, 768—776 (1935).

Es sei $y = \varphi(x)$ eine im Intervall $a \leqq x \leqq b$ wachsende konvexe Funktion. $\mathfrak{A}$ bedeute das arithmetische Mittel von n Zahlen $a_\nu (a \leqq a_\nu \leqq b)$ und $\mathfrak{A}\varphi$ das arithmetische Mittel der Zahlen $\varphi(a_\nu)$. Ferner sei $\mathfrak{A}_\varphi = \varphi^{-1}(\mathfrak{A}\varphi)$, so daß $\mathfrak{A}\varphi = \varphi(\mathfrak{A}_\varphi)$. Dann ist nach Hölder und Jensen $\varphi(\mathfrak{A}_\varphi) = \mathfrak{A}\varphi \geqq \varphi(\mathfrak{A})$ und demnach auch $\mathfrak{A}_\varphi \geqq \mathfrak{A}$, was man bekanntlich am einfachsten daraus entnimmt, daß der Punkt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\varphi) = (\mathfrak{A}, \varphi(\mathfrak{A}_\varphi))$ der Schwerpunkt der n Punkte $(a_\nu, \varphi(a_\nu))$ ist und deshalb nicht unterhalb der Kurve $\varphi(x)$ liegt. Durch arithmetische Betrachtungen gewinnt nun der Verf. die scharfen oberen Schranken für die Differenzen $\varphi(\mathfrak{A}_\varphi) - \varphi(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{A}_\varphi - \mathfrak{A}$. Geometrisch folgen seine Resultate sofort aus der Bemerkung, daß der Schwerpunkt $(\mathfrak{A}, \varphi(\mathfrak{A}_\varphi))$ nicht oberhalb der die Punkte $(a, \varphi(a))$ und $(b, \varphi(b))$ verbindende Sehne der Kurve $\varphi(x)$ liegen kann, so daß $\varphi(\mathfrak{A}_\varphi) - \varphi(\mathfrak{A})$ höchstens gleich dem größten vertikalen und $\mathfrak{A}_\varphi - \mathfrak{A}$ höchstens gleich dem größten horizontalen Abstand von Kurve und Sehne ist. Ähnliches gilt, wenn $\varphi(x)$ abnehmend bzw. konkav ist. In dem Spezialfall $\varphi(x) = x^\varrho$ ist $\mathfrak{A}_\varphi$ der bekannte Potenzmittelwert $\mathfrak{A}_\varrho$. In diesem Fall liefern den obigen ähnliche geometrischen Betrachtungen für gegebene a und b $(0 < a < b)$ die scharfen Schranken von $\mathfrak{A}_\varrho^\varrho/\mathfrak{A}^\varrho$, also auch von $\mathfrak{A}_\varrho/\mathfrak{A}$. Dies hat, was dem Verf. offenbar entgangen ist, kürzlich Gheorghiu gezeigt (vgl. dies. Zbl. 8, 345). Die vom Verf. durch arithmetische Betrachtungen gewonnenen Schranken sind nicht, wie behauptet, die scharfen. *Jessen.*

Rajchman, Alexandre: Sur l'inégalité Hausdorff-Riesz. Fundam. Math. **24,** 288 bis 297 (1935).

Let $X_k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk}\, x_j$, $k = 1, 2, \ldots, m$, be an orthogonal and normal substitution, that is $\sum_{k=1}^{m} |X_k|^2 = \sum_{j=1}^{m} |x_j|^2$, for all possible values of $x_1, x_2, \ldots x_m$. Then, for every $1 \leqq a \leqq 2$, we have (*) $\left(\sum_{k=1}^{m} |X_k|^{a'}\right)^{1/a'} \leqq M^{\frac{(a-2)}{a}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^{a}\right)^{1/a}$, where $a' = a/(a-1)$, and $M = \mathrm{Max}\,|a_{jk}|$. This inequality, which was proved by F. Riesz, may be used to obtain F. Riesz's well-known generalization of the Hausdorff-Young theorem [see F. Riesz, Math. Z. **18**, 87—95 (1923); F. Hausdorff, ibid. **16**, 163—169 (1923)]. In his paper, Rajchman gives a simple proof of (*) in the case when (a) the values of $x_1, \ldots x_m$ which make the ratio $(\sum |X_k|^{a'})^{1/a'}/(\sum |x_j|^{a})^{1/a}$ a maximum are non-negative, (b) the elements $a_{1k}, a_{2k}, \ldots a_{mk}$ of some line are also non-negative. The author promises to remove this restriction in another paper. *A. Zygmund.*

Weyl, Hermann: Über das Pick-Nevanlinnasche Interpolationsproblem und sein infinitesimales Analogon. Ann. of Math., II. s. **36,** 230—254 (1935).

Das Interpolationsproblem beschäftigt sich mit der Klasse der beschränkten analytischen Funktionen $w(z)$ ($Iw \geqq 0$ für $Iz > 0$), welche in gegebenen Punkten $z = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ vorgegebene Werte annehmen. Als Grenzfälle ergeben sich für $\alpha_n = \alpha_0$ ($n = 1, 2, \ldots$), $I\alpha_0 > 0$ das Carathéodorysche Koeffizientenproblem und für $\alpha_0 = \infty$ das Stieltjessche Momentenproblem. Die vom Ref. gegebene Lösung des Problems beruht auf einer rekursiven Anwendung des Schwarzschen bzw. Juliaschen Lemmas. Der Verf. geht von der diesem Algorithmus entsprechenden Differenzengleichung zu einem System von zwei linearen Differentialgleichungen für zwei Funktionen $f(s)$, $g(s)$ über, indem er die Folge der Indizes n des Algorithmus durch eine stetige Veränderliche s ersetzt. Dieses System

$$\frac{df}{ds} = g\,\frac{za'' - b''}{za' - b'}, \qquad \frac{dg}{ds} = f\,\frac{za - b}{za' - b'} \qquad (a'b - b'a > 0, \qquad a''b' - b''a' > 0)$$

unterscheidet sich von den Gleichungen der klassischen Eigenwertprobleme darin, daß es den Spektralparameter z linear gebrochen enthält. Im besonderen Fall des Momentenproblems wird man auf ganze lineare Koeffizienten von z geführt; dieser Fall ist früher von Hellinger nach Methoden behandelt worden, welche der Verf. in seiner Habilitationsschrift entwickelt hatte. — Sind (f_1, g_1), (f_2, g_2) diejenigen Lösungen des Systems, welche für $s = 0$ die Werte (0, 1), (1, 0) annehmen, so genügt die Lösung $f = f_1 + wf_2$, $g = g_1 + wg_2$ dann und nur dann im Endpunkte $s = l$ des Intervalls $0 \leqq s \leqq l$ einer Randbedingung $f - hg = 0$, wo h reell ist, wenn w die Peripherie eines gewissen Kreises $k_l(z)$ durchläuft (§ 2). Diese Kreise spielen in dieser Theorie eine grundlegende Rolle. Mit Hilfe der „Greenschen Formel" ergibt sich für den Radius ein Integralausdruck, woraus folgt, daß die Kreise $k_l(z)$ für eine Folge wachsender Werte l ineinandergeschachtelt sind. Sie nähern sich also für $l \to \infty$ entweder einem Punkt oder einem Grenzkreis. In § 3 wird durch Übergang zu der entsprechenden Integralgleichung gezeigt, daß der Grenzpunktfall bzw. Grenzkreisfall unabhängig von der Wahl des Parameterwertes z ist; hier bringt Verf. eine wesentliche Vereinfachung zur Beweismethode seiner Habilitationsschrift. Im Grenzkreisfall erhält man jeden Punkt w des Grenzkreises $k_\infty(z)$, so daß man w als eine linear gebrochene Funktion einer positivimaginären Veränderlichen w_∞ ansetzt; die Koeffizienten sind wohlbestimmte analytische Funktionen von z. Im Grenzpunktfall bestimmt sich der Grenzpunkt w als eine analytische Funktion des Parameters z. Sämtliche Beweise werden direkt unter Anwendung der Theorie der Integralgleichungen geführt, zu welcher die Arbeit neue wichtige Beiträge gibt. — In § 4 wird das analoge Differenzenproblem behandelt, was einige besondere Ausführungen erfordert. Durch diese Resultate hat dann auch das Interpolationsproblem eine vollständige, neue und interessante Lösung erhalten. *Rolf Nevanlinna* (Helsinki).

Lagrange, René: Mémoire sur les séries d'interpolation. Acta math. **64**, 1—80 (1935).

The series considered is

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) \quad \text{where} \quad a_n(z) = a_n(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_n)/[(z-\beta_1)\ldots(z-\beta_n)], \quad \text{with}$$

$\alpha_n \to A$ and $\beta_n \to B$; without loss of generality it is assumed (I) that $A = \infty$ when $A = B$ and (II) that $A = 0$, $B = \infty$ when $A \neq B$. Under (I) special interest attaches to the case

(N) $\quad \alpha_n = \alpha + nu, \quad \beta_n = \beta + nv \quad (u \neq v; \quad u \cdot v \neq 0; \quad \Re(v/(v-u)) > 0)$;

and under (II) to the case in which

(E) $$\sum |\alpha_n|, \quad \sum 1/|\beta_n|$$

converge. For series of type (N) [(E)] properties of convergence and of absolute convergence — together with formulas for the boundary of the region of convergence, etc. — like those of Newton or factorial (power) series are established in Chap. I, II, and III; it is also shown that zero possesses infinitely many developments in series of each type. In Chap. IV, on linear transformation and analytic continuation, it is proved that series of both types can be transformed like Newton or factorial series. Chap. V and VI are devoted to the expansion problem: a function meromorphic in the neighborhood of the origin has a development of type (E); for a development of type (N) the author establishes an analogue of the Carlson-Nörlund theorem on the expansion of a function in a Newton series (see Nörlund, Leçons sur les séries d'interpolation, pp. 131—141). In this latter connection a "characteristic" function $\psi(\theta)$ $(\theta = J(z))$ is significant: a detailed examination of ψ is made, from which it appears that special properties are enjoyed by series (N) with $|u| < |v|$ $(\psi > 0)$; in particular, a function of finite order with respect to exp. $|z|$ has a series development of this type. A third expansion theorem is given for series of type (N) with $v = -u$. The paper concludes with a consideration of the expansion of a polynomial in series of type (N), which illuminates the distinction made earlier between the cases $|u/v| < 1$, $= 1$, and > 1.

C. R. Adams (Providence).

Ghermanesco, M.: Sur les équations aux différences finies. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **13**, 309—333 (1935).

The author defines the entire function $g(x)$ to be "of exponential type $q(p)$" when

$$\lim_{n\to\infty} |g^{(n)}(0)|^{1/n} = q > 0 \qquad \text{and} \qquad |g(x)| < A(|x|^p + 1)\, e^{q|x|},$$

p being the least integer ($\geqq 0$) for which the latter holds. The chief object of Part I is to prove that a function of exponential type $q(p)$ whose "Pincherle adjoint" (= Borel transform) is meromorphic with poles of order $\leqq p+1$ possesses a unique expansion $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) e^{\xi_n x}$ where $P_n(x)$ is a polynomial of degree p and the $|\xi_n|$ are $\leqq q$. Part II is devoted mainly to the difference equation

$$\sum_{l}^{x} F = \sum_{i=0}^{l} A_i F(x+\omega_i) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) e^{\xi_n x}, \tag{1}$$

the A_i, ω_i being constants (for treatment of a similar problem see Carmichael, Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 1—28; this Zbl. **6**, 169). For the equation $\sum^{x} F = P_n(x) e^{\xi_n x}$ a solution $F_n = P_{n,p+k_n}(x) e^{\xi_n x}$ is easily obtained, $P_{n,p+k_n}(x)$ being a polynomial of degree $p + k_n$ with k_n ($\geqq 0$) designating the multiplicity of ξ_n as a root of $h(t) = \sum_i A_i e^{\omega_i t}$. $\sum_n F_n$ then provides a formal solution of (1); the author offers a proof of convergence of this series which the reviewer is unable to follow even in the simplest case $p \equiv k_n \equiv 0$, there being no apparent reason why $|h(\xi_n)|$ is bounded away from zero.

C. R. Adams (Providence).

Cioranesco, Nicolas: L'intervalle de contraction pour les équations algébriques aux différences finies. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **4**, 97—99 (1933).

Brecka, W.: Sur les polynomes multiplement monotones qui s'écartent le moins de zéro, les deux premiers coefficients étant donnés. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 618 bis 619 (1935).

L'auteur donne des formules pour l'oscillation minima du polynome multiplement monotone (croissant) d'ordre $h+1$ de degré n

$$y_n(x) = \sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + \sigma_n,$$

dans l'intervalle $(-1, +1)$, lorsque deux coefficients σ_0 et σ_1 sont donnés, dans le cas, où $n-h-1$ est pair et σ_0 et $\frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ de même signe (il serait plus simple de dire que $\sigma_1 \geqq 0$). La méthode algébrique employée par l'auteur est celle qui a été proposée par S. Bernstein dans son séminaire à Kharkow, où elle a été appliquée pour la première fois en 1929 à la résolution d'un problème analogue („Sur la variation minimale du polynome monotone $P_n(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ dont les dérivées $P'_n(1) = \alpha^2$, $P''_n(1) = b$ sont données", Communications de la Société Mathématique de Kharkow, t. III]. *S. Bernstein* (Leningrad).

Kantorovitch, L.: La représentation explicite d'une fonction mesurable arbitraire dans la forme de la limite d'une suite de polynomes. Rec. math. Moscou **41**, 503—506 (1934).

En remplaçant, dans le polynome de Bernstein

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

$f\left(\frac{k}{n}\right)$ par la moyenne métrique de la fonction $[f(x)]_n$ dans l'intervalle

$$\left(\frac{k}{n} - 3n^{-\frac{1}{4}},\ \frac{k}{n} + 3n^{-\frac{1}{4}}\right),$$

on obtient de nouveaux polynomes $B_n^*(f, x)$ jouissant de la propriété de converger vers $f(x)$ dans tous les points où la fonction $f(x)$ est approximativement continue. — On entend sous la „moyenne métrique" de $f(x)$ dans l'intervalle (α, β) un nombre μ tel que

$$\operatorname{mes}\{f(x) \geqq \mu\} \geqq \frac{\beta-\alpha}{2}, \qquad \operatorname{mes}\{f(x) > \mu\} < \frac{\beta-\alpha}{2}.$$

La „continuité approximative" de $f(x)$ au point $x = x_0$ veut dire: quelque petit que soit $\varepsilon(>0)$, on peut indiquer un nombre h_0 tel que pour $0 < h < h_0$ on a

$$\operatorname{mes}\{|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon,\ |x - x_0| < h\} < \frac{h}{2}.$$

La fonction $[f(x)]_n$ est définie par les relations

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x) \text{ si } |f(x)| \leqq n \\ n \text{ si } f(x) > n \\ -n \text{ si } f(x) < n \end{cases}$$

— Fautes d'imprimerie: h au lieu de n dans la formule (10), à changer le sens du signe d'inégalité dans (11). [Cf. L. Kantorovitch, C. R. Acad. Sci. URSS **20**, **21**, 563 (1930)]. *W. Gontcharoff* (Moscou).

Ricci, Giovanni: Sui teoremi Tauberiani. I. mém. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **13**, 287—308 (1935).

Die Funktion $A(x)$ sei für $x \geqq 0$ definiert, und es sei E eine nichtbeschränkte Teilmenge der positiv-reellen Achse. Der Verf. betrachtet die positiven Zahlen τ, für die zwei Zahlen $x_0(\tau)$, $\omega(\tau)$ so existieren, daß für jedes $x \geqq x_0(\tau)$ aus E erfüllt ist:

$$\operatorname{Min}\left\{\underset{x \leqq y \leqq (1+\omega)x}{\operatorname{Max}} (A(x) - A(y)),\ \underset{(1-\omega)x \leqq y \leqq x}{\operatorname{Max}} (A(x) - A(y))\right\} \leqq \tau.$$

Die untere Grenze dieser Zahlen τ wird als „scarto Tauberiano superiore“ von $A(x)$ in bezug auf E definiert und mit $T^+(E)$ bezeichnet; die Definition des „scarto Tauberiano inferiore“ ist analog. — Der Verf. beweist: „Das Integral $f(s) = \int_0^\infty e^{-su} A(u)\,du$ sei für $s > 0$ konvergent, und es strebe $s f(s) \to 0$ mit $s \to +0$. Ferner mögen zwei positive Zahlen K und H vorhanden sein derart, daß aus $0 \leqq x \leqq y \leqq (1+H)\,x$ stets folgt: $A(y) - A(x) > -K$. Dann ist $A(x) = O(1)$ mit $x \to \infty$, und die scarti Tauberiani inferiore und superiore $T^+(E)$ und $T^-(E)$ von $A(x)$ in bezug auf eine beliebige nichtbeschränkte Menge E erfüllen für $x \to \infty$:

$$\underline{\lim}_{x \text{ aus } E} A(x) - \overline{\lim} A(x) \leqq T^-(E) \leqq \underline{\lim}_{x \text{ aus } E} A(x) \leqq \overline{\lim}_{x \text{ aus } E} A(x) \leqq T^+(E) \leqq \overline{\lim}_{x \text{ aus } E} A(x) - \underline{\lim} A(x).$$

R. Schmidt (Kiel).

● **Paley, Raymond E. A. C., and Norbert Wiener: Fourier transforms in the complex domain. (Amer. math. Soc. colloq. publ. Vol. 19.)** New York: Amer. math. Soc. 1934. VIII, 184 S., geb. $ 3.—.

As stated in the preface, the book covers a great variety of topics, but is unified by the central idea of application of the Fourier transform in the complex domain. The variety is great indeed. We shall enumerate the main characteristic theorems treated in the book, most of which have been published previously by the authors in one form or other, or are known theorems with new proofs and appearing in new connections. — (1) A new proof of Carleman's theorem on quasi-analytic functions, employing the remarkable theorem that a function of class L_2 in $-\infty < x < \infty$ vanishes on a half-line if and only if its Plancherel transform $\varphi(x)$ makes the integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log|\varphi(x)||}{1+x^2}\,dx$ finite. (2) A new proof of Szasz's theorem that the set of functions $\{x^{\lambda_n}\}$, $\Re(\lambda_n) > -\frac{1}{2}$, will be closed L_2 over $(0, 1)$ when, and only when, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2\Re(\lambda_n)}{1 + |\lambda_n|^2}$ diverges. (3) Solution of the equation $f(x) = \int_0^\infty K(x-y)\,f(y)\,dy$ (the lower limit of the integral is 0, not $-\infty$!). (4) Theorems on the distribution of zeros for entire functions $F(z)$ of exponential type which, if specifically applied to functions of the form $F(z) = \int_b^a e^{izx} f(x)\,dx$ give (4) fine theorems about the closure of sets of functions $\{e^{i\lambda_n x}\}$ and $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ over a finite interval. For instance, if $|\lambda_n - n| \leqq L < \frac{1}{\pi^2}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, then the set of functions $\{e^{i\lambda_n x}\}$ is closed L_2 over $(-\pi, \pi)$, and admits a closed normal biorthogonal set $\{h_n(x)\}$ with interesting properties. (5) A novel gap-theorem on almost-periodic functions, and lastly (6) Wiener's differential space. Since the present exposition of this subject differs somewhat from previous ones we shall give a terse exposition of it. — Let each variable α_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ represent the interval $0 \leqq \alpha_n \leqq 1$ with the usual Lebesgue measure, and let the space of points $\alpha = (\ldots, \alpha_{-n}, \ldots, \alpha_0, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ have the modern measure of an infinitely dimensional torus, and let a_n be $(-\log \alpha_{2n-1})^{1/2} e^{2\pi i \alpha_{2n}}$. Then the series

$$\psi(x, \alpha) \sim x a_0 + \sum_1^\infty \frac{a_n e^{2\pi i n x}}{in} + \sum_1^\infty \frac{a_n e^{-2\pi i n x}}{-in}$$

is for almost all α the Fourier series of a continuous function in x. In fact, for almost all α, $\overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} |\psi(x+\varepsilon, \alpha) - \psi(x, \alpha)|\, \varepsilon^{-\lambda}$ is 0 uniformly in all x, whenever $\lambda < \frac{1}{2}$ (; but, whenever $\lambda > \frac{1}{2}$, for almost all α it is infinite for all x). Let $F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{2\pi i n x}$ be a function of L_2. For almost all α, the integral $\int_0^1 F(x)\,d\psi(x, \alpha)$ exists as the sum $\sum_{-\infty}^{\infty}{}' f_n a_n$, and if $F_1, \ldots, F_k$ are orthonormal then for an arbitrary non-negative measurable function $\Phi(z_1, \ldots, z_k)$ of the complex variables $z_1, \ldots, z_k$,

$$\int_0^1 \Phi\left\{\int_0^1 F_1(x)\,d\psi(x, \alpha), \ldots, \int_0^1 F_k(x)\,d\psi(x, \alpha)\right\} d\alpha = \frac{1}{\pi^{k/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \Phi(z_1, \ldots, z_k)\, e^{-|z_1|^2 - \cdots - |z_k|^2}\, dz. \quad (*)$$

Furthermore, if T^t, $-\infty < t < \infty$, is a continuous group of unitary transformations in L_2, for which

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^1 \overline{F_p(x)}\, T^t F_q(x)\,dx = 0 \qquad p, q = 1, \ldots, k$$

then, for almost all α,

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\int_0^A \Phi\left\{\int_0^1 T^t F_1(x)\,d\psi(x,\alpha), \ldots, \int_0^1 T^t F_k(x)\,d\psi(x,\alpha)\right\} dt$$

is equal to the common value of (*); (Birkhoff's ergodic theorem). Special application in the case $T^t F(x) = F(x+t)$. *Bochner* (Princeton).

Reihen:

Ganapathy Iyer, V.: Tauberian theorems on generalised Lambert's series. J. Indian Math. Soc., N. s. **1**, 73—87 (1934).

Reihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{-\lambda_n s}}{1 - e^{-\alpha\lambda_n s}}$ mit $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$ und $\alpha > 0$ bezeichnet der Verf. als verallgemeinerte Lambertsche Reihen. Es wird gezeigt: „Die Reihe

$$f(\xi) = \alpha\xi \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n e^{-\lambda_n \xi}}{1 - e^{-\alpha\lambda_n \xi}}$$

sei für jedes $\xi > 0$ konvergent, und es strebe $f(\xi) \to A$ mit $\xi \to 0 + 0$. Die Funktion $\zeta(s, \alpha) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^s} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^s} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}+2\right)^s} + \cdots$ besitze auf der Vertikalen $\Re(s) = 1$ keine Nullstellen, und schließlich sei $a_n = O(\lambda_n - \lambda_{n-1})$. Dann ist die Reihe $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n}$ konvergent und hat den Summenwert A." Ferner wird ein Umkehrsatz (tauberian theorem) über verallgemeinerte Lambertsche Reihen mit positiven Koeffizienten von der Art bewiesen, wie sie von Potenzreihen, Dirichletschen Reihen usw. her bekannt sind. — Das entscheidende Beweismittel ist der Hauptsatz der Theorie der Mittelungsumkehrsätze von N. Wiener [Ann. of Math. (2) **33**, Nr 1, 1—100 (1932), insbes. S. 25, th. VIII; dies. Zbl. 4, 59 und 5, 250]. *R. Schmidt* (Kiel).

Ganapathy Iyer, V.: Tauberian and summability theorems on Dirichlet's series. Ann. of Math., II. s. **36**, 100—116 (1935).

Es werden Sätze von K. Ananda Rau [Proc. London Math. Soc. (2) **34**, 414—440 (1932); dies. Zbl. **6**, 10] und O. Szász (Atti del Congr. Internationale dei Math. Bologne **3**, 269—276) über Rieszsche Mittel kombiniert und weiterentwickelt. Mit Hilfe der Ergebnisse werden über Dirichletsche Reihen Umkehrsätze vom Typus der Sätze von Schnee und Landau hergeleitet. *R. Schmidt* (Kiel).

● **Zygmund, Antoni: Trigonometrical series. (Monogr. mat. Tom 5.)** Warszawa u. Lwów: Subwencji Funduszu Kultury Narodowej 1935. 331 S. $ 5.—.

A thoroughly modern and remarkably complete account of the theory of trigonometric series. The chapter headings follow with running comments. I. Trigonometrical series and Fourier series. II. Fourier coefficients. Tests for the convergence of Fourier series. III. Summability of Fourier series (chiefly Abel and Cesàro). IV. Classes of functions and Fourier series. (Conditions that a Fourier series belong to a function of given class, factor sequences, Riesz-Fischer theorem, Parseval's relations.) V. Properties of some special series. (Monotone coefficients, dispersion power series, lacunary series, series in Rademacher's functions.) VI. The absolute convergence of trigonometrical series (structure of convergence set, sufficient conditions, Wiener's theorem). VII. Conjugate series and complex methods in the theory of Fourier series (chiefly theorems of M. Riesz and related questions). VIII. Divergence of Fourier series (including Kolmogoroff's example). Gibbs's phenomenon. IX. Further theorems on Fourier coefficients. Integration of fractional order. (Young-Hausdorff theorem, M. Riesz' convexity theorems, rearrangement theorems of Hardy-Littlewood-Paley, lacunary series.) X. Further theorems on the summability and convergence of Fourier series. (Strong summability, the Kolmogoroff-Seliverstoff theorem, conditions for C-summability.) XI. Rie-

mann's theory of trigonometrical series (principle of localization, sets of uniqueness, results of Rajchmann.) XII. Fourier integrals ($1 \leqq p \leqq 2$). — Every chapter is completed by an interesting collection of miscellaneous theorems and examples. Large bibliography. The excellent treatise contains a number of important original contributions by the author.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Szász, Otto: On Fourier series of continuous functions. Amer. Math. Monthly **42**, 37—38 (1935).

Bekanntlich läßt sich der Riemann-Lebesguesche Satz ($a_n \to 0$) auch im Bereich der stetigen Funktionen nicht verschärfen, d. h. zu einer beliebigen Folge $u_n > 0$, $u_n \to 0$ gibt es eine stetige Funktion $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{-inx}$ mit $\overline{\lim} \frac{|a_n|}{u_n} > 0$. Das von W. Randels [Amer. Math. Monthly **40**, 97—99 (1933); dies. Zbl. **6**, 162] angegebene Konstruktionsverfahren für eine solche Funktion ist ziemlich kompliziert. — Verf. argumentiert in einfachster Weise so: Nach Voraussetzung läßt sich eine Teilfolge $u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots$ so wählen, daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{n_\nu}$ konvergiert. Dann ist $\sum a_n e^{-inx} \equiv \sum u_{n_\nu} e^{-in_\nu x}$ absolut und gleichmäßig konvergent, ist also die Fouriersche Reihe einer stetigen Funktion, und es ist $\overline{\lim} \frac{|a_n|}{u_n} = 1$.

R. Schmidt (Kiel).

Moursund, A. F.: On summation of derived series of the conjugate Fourier series. Ann. of Math., II. s. **36**, 182—193 (1935).

Continuation of the author's investigations on N_{z_p} summability as applied to Fourier series [Ann. of Math., II. s. **35**, 239—247 (1934); this Zbl. **9**, 162]. The author proves that if $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ and is periodic with period 2π then the N_{z_p} sum of the r-th, $r = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, derived series of the conjugate Fourier series is $\bar{f}^{(r)}(x)$ wherever this generalized r-th derivative of the conjugate function exists.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Obrechkoff, Nikola: Sur la sommation des séries trigonométriques de Fourier par les moyennes arithmétiques. Bull. Soc. Math. France **62**, 84—109 u. 167—184 (1934).

Let

$$\varphi(t) = \tfrac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t) - 2A], \qquad \mu_p(t) = p t^{-p} \int_0^t (t-u)^{p-1} \varphi(u)\, du,$$

with $\mu_0(t) = \varphi(t)$, and let $s_n^{(k)}(x)$ stand for the n-th (C, k) mean of the Fourier series of $f(x)$. The author proves a number of sharp theorems connecting these quantities. If for a $p \geqq 0$

$$\Phi_p(t) \equiv \int_0^t |\mu_p(s)|\, ds = o(t),$$

then $s_n^{(p)}(x) = o[\log n]$, and the Fourier series is summable (C, k), $k > p$, to the sum A. Same result if $\Phi_p(t) = O(t)$ and $\mu_{p+1}(t) = o(1)$. If $\Phi_p(t) = O(t^{1+\alpha})$, $0 < \alpha \leqq 1$, then $s_n^{(k)}(x) - A = O(n^{-\alpha})$ for $p + \alpha < k \leqq p + 1$, but $O[n^{-\alpha} \log n]$ if $k = p + \alpha$. In the first estimate O can be replaced by o if in addition $\int_0^t \mu_p(s)\, ds = o(t^{1+\alpha})$. — In the second part of the paper the author deals with the conjugate series. Let $d(t) = f(x+t) - f(x-t)$, and let $d_p(t)$ bear the same relation to $d(t)$ as $\mu_p(t)$ does to $\varphi(t)$. If $d_k(t) \to D$ for some $k \geqq 0$, then

$$\bar{s}_n^{(k)}(x)/\log n \to D/\pi,$$

where $\bar{s}_n^{(k)}(x)$ is the n-th (C, k) mean of the conjugate series. This is also true if the moving average of $d_k(t)$ tends to D at $t = 0$. Let

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t)] \cot \frac{t}{2}\, dt$$

be convergent, and let

$$\Delta_p(t) \equiv \int_0^t |d_p(s)|\, ds = o(t)$$

for some $p \geqq 0$, then the conjugate series is summable $(C, k), k > p$, to the sum A. Similar theorem for the first derived series of the conjugate series. Finally a couple of theorems on the order of magnitude of the Riesz means of the Fourier series and of the conjugate series when the order of $\mu_p(t)$ and $d_p(t)$ at $t = 0$ is known. *Hille* (New Haven, Conn.).

Wang, Fu Traing: On the summability of Fourier series by Riesz's logarithmic mean. II. Tôhoku Math. J. **40**, 274—292 (1935).

$$\text{Let } f(x) \varepsilon L, f(x) \sim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x), \varphi(u) = \tfrac{1}{2}[f(x+u) + f(x-u) - 2s].$$

The following two theorems are established: (a) If $\varphi(u) \to 0(R, \alpha)$, $\alpha > 0$, then the Fourier series of f is summable $(R, \alpha + \delta)$, $\delta > 0$, at the point x, to sum s. (b) If the Fourier series of f is summable (R, α), $\alpha > 0$, at the point x, to sum s, then $\varphi(u) \to 0\ (R, \alpha + 1 + \delta)$. By (R, α) we mean the α-th logarithmic mean of Riesz. (I. see this Zbl. 8, 312.) *A. Zygmund* (Wilno).

Hardy, G. H.: Remarks on some points in the theory of divergent series. Ann. of Math., II. s. **36**, 167—181 (1935).

(1) The first point refers to a system of linear equations in infinitely many unknowns considered by Fourier (Théorie de la chaleur. §§ 207—218). It is shown that Fourier's formulas are correct under suitable restriction on the function $f(x)$ involved, provided the series are interpreted as Borel sums. — (2) The series

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b^{-n} \varphi^{(n)}(x)$$

has the formal sum

$$e^{bx} b \int_0^{\infty} e^{-bt} \varphi(t)\, dt,$$

if $\varphi(\xi + i\eta)$ is regular for $\xi > 0$, and the integral is convergent. The series is asymptotic to this sum and also summable (B^2). — (3) The author investigates the summation of Fourier series by the methods of Weierstrass (W), de la Vallée Poussin (V), and Borel (B), and gives necessary and sufficient conditions for such summability. The (V) and (W) methods are equivalent for Fourier series. *E. Hille* (New Haven).

Differentialgleichungen:

Peyovitch, Tadya: Sur une propriété asymptotique à zéro des équations linéaires. Čas. mat. fys. **64**, 158—159 (1935).

Alferov, V.: Über die Leitkurven der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Rec. math. Moscou **41**, 453—457 u. dtsch. Zusammenfassung 457 (1934) [Russisch].

Wenn eine Differentialgleichung erster Ordnung die Form

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y - f[\varphi(x, y)]}{x - \varphi(x, y)}$$

hat, so schneiden sich die Tangenten zu den Integralkurven längs jeder Kurve der Schar $\varphi(x, y) = \alpha$ in einem Punkte der Kurve $\eta = f(\xi)$ (A). Wenn φ nur von x abhängt, ist (A) die Leitkurve einer linearen Differentialgleichung (Bieberbach, Differentialgleichungen, I, 2, § 2). *W. Stepanoff* (Moskau).

Corsaro, Agatino: Equazioni di Riccati generalizzate. Acta Soc. Gioeniae Catinenses Naturalium Sci. **20**, Mem. XIX, 1—10 (1934).

Pour une équation $y' = P_n(y)$, P_n étant un polynôme de dégré n en y dont les coefficients sont des fonctions de x, l'ensemble des tangentes aux courbes intégrales dans tous les points d'une droite $x = x_0$ enveloppe une courbe algébrique d'ordre n; la même enveloppe pour une équation de la forme $y' = P_n/Q_n$ a l'ordre $2n$. *W. Stepanoff.*

Lahaye, Edmond: Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre possédant un point singulier. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **20**, 1096—1105 (1934).

Für die Differentialgleichung

$$x^m \frac{dy}{dx} = x(a + P(x, y)) + \beta y^{q+1}(1 + Q(x, y))$$

[P, Q nach positiven wachsenden Potenzen von x, y fortschreitende Reihen, die für $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r'$ gleichmäßig konvergieren; $P(0,0) = Q(0,0) = 0$, $a \neq 0$; $m, q > 0$, $m - 2 + \frac{1}{q+1} > 0$] werden mittels komplizierter Integralausdrücke nach der Methode der sukzessiven Näherungen unendlich viele Lösungen $y(x)$ bestimmt, die längs geeigneter nach $x = 0$ laufenden Linien erklärt sind und mit $x \to 0$ gegen $y = 0$ konvergieren. *Kähler* (Hamburg).

Jančevskij, S.: Über irreguläre Oszillationseigenschaften der Eigenfunktionen bei den Eigenwertproblemen vierter Ordnung. C. R. Acad. Sci. URSS **1**, 89—90 u. dtsch. Text 91—92 (1935) [Russisch].

Verf. hat früher eine Reihe von selbstadjungierten Randwertaufgaben (bei Differentialgleichungen) vierter Ordnung angegeben, für welche ein Oszillationstheorem (im üblichen Sinne) gilt; wesentlich war dabei, daß die Vorzeichen gewisser Koeffizienten in den Randbedingungen passend gewählt wurden. In der vorliegenden Note werden nun Fälle von selbstadjungierten, und zwar Sturmschen, Randwertaufgaben vierter Ordnung betrachtet, in welchen jene Vorzeichenbedingungen nicht mehr erfüllt sind. In diesen Fällen können Eigenwerte auftreten, welche das Oszillationstheorem insofern stören, als die Oszillationszahlen der, einem bestimmten derartigen Eigenwerte zugehörigen Eigenfunktionen zwischen 0 und k schwanken, wobei k beliebig groß gewählt werden kann. [Beispiel: Differentialgleichung: $y^{(4)} - \lambda y = 0$; Randbedingungen: $y(0) = y^{(2)}(0) = 0$, $y^{(3)}(1) - Q y^{(2)}(1) = 0$; $y^{(1)}(1) - Q y(1) = 0$; durch hinreichend große Wahl von Q kann k beliebig groß gemacht werden.] — Eine allgemeine Untersuchung wird in Aussicht gestellt. *Haupt* (Erlangen).

Bochner, S., and J. v. Neumann: On compact solutions of operational-differential equations. I. Ann. of Math., II. s. **36**, 255—291 (1935).

Als Verallgemeinerung der Fastperiodizitätseigenschaften von Lösungen einer partiellen Differentialgleichung [Bochner, Acta math. **62**, 227—237 (1934); dies. Zbl. **9**, 163] werden in der vorliegenden Arbeit diese Eigenschaften für allgemeinere Gleichungen untersucht. Die unbekannte Funktion φ_t wird als Funktion einer reellen Veränderlichen t betrachtet, deren Werte Elemente des komplexen Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ sind. Um die Differenzierbarkeit von φ_t nach t nicht vorauszusetzen, wird zuerst $\int \varphi_t \, dt$ definiert; wenn man $J_t^m \varphi_t = \int_0^t (t-s)^{m-1} \varphi_s \, ds$ setzt, hat die in Rede stehende Gleichung die Gestalt:

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu (J_t^\nu \varphi_t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_\mu t^\mu.$$

Hier sind die A_ν abgeschlossene Operatoren in $\mathfrak{H}$ und die ω_μ willkürliche „Punkte". Voraussetzungen: φ_t ist in jedem endlichen Intervall integrierbar; die Menge $\{\varphi_t\}$, $-\infty < t < +\infty$, ist in $\mathfrak{H}$ kompakt; wenn ψ die Gleichungen

$$A_0 \psi = A_1 \psi = \cdots = A_n \psi = 0$$

erfüllt, so ist $\psi = 0$. Über die Operatoren A_ν wird vorausgesetzt: entweder (I) alle A_ν sind mit allen adjungierten A_ν vertauschbar (also sind insbesondere die A_ν normal) oder (II) alle A_ν sind Polynome von einem Hermiteschen Operator A, $A_\nu = \sum_{\lambda=0}^{m} a_{\nu\lambda} A^\lambda$, und die Gleichungen $\sum_{\nu=0}^{m} (i\beta)^{n-\nu} a_{\nu\lambda} = 0$ $(\lambda = 0, \ldots, m)$ haben keine gemeinsame reelle Wurzel. Dann ergibt sich:

$$\varphi_t = \sum_N \varphi_t^N, \quad \varphi_t^N = \sum_{q=1}^{l_N} e^{i\beta_{N,q} t} \psi_{N,q} \quad l_N \leqq n;$$

$\beta_{N,q}$ sind reelle Zahlen, $\psi_{N,q}$ gehören zu den untereinander orthogonalen abgeschlossenen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_N$ von der Beschaffenheit, daß sämtliche A_ν durch alle $\mathfrak{M}_N$ reduziert werden und in jeder $\mathfrak{M}_N$ beschränkt sind; die $\psi_{N,q}$ erfüllen die Gleichungen:

$\sum_{\nu=0}^{n}(i\beta)^{n-\nu}A_\nu\psi_{N,q}=0, N=1,2,\ldots, q=1,2,\ldots,l_N$. Im Falle (I) ist $\mathfrak{H}=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2+\cdots$; im Falle (II) ist $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2+\cdots=\mathfrak{M}$, A wird durch $\mathfrak{M}$ reduziert, ist daselbst hypermaximal und besitzt ein reines Punktspektrum. *W. Stepanoff* (Moskau).

Saltykow, N.: Étude sur l'évolution des méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Extrait de: Mém. Acad. Roy. Belg., II. s. **13**, 35 S. (1934).

In einer unlängst erschienenen Arbeit (vgl. dies. Zbl. **10**, 297) hat der Verf. eine auf den Begriff der integrierbaren Elemente (i. E.) gegründete, die Integration von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion betreffende Theorie entwickelt. — Ein Teil der vorliegenden Arbeit wird nun historischen Betrachtungen über Anfänge jener Theorie und insbesondere die der Begriffe von i. E. und Funktionengruppen gewidmet. Als Urheber der Theorie wird Jacobi und neben ihm Liouville, Bertrand und Bour, übrigens in Einklang mit den bibliographischen Bemerkungen in der oben zitierten Arbeit, erkannt. Sonst liegt der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit im Beweise von 3 die Transformation von Systemen partieller Differentialgleichungen von der Form $(F_i, f)=0$ $(i=1,\ldots,m)$ betreffenden Sätzen, die vom Verf. schon früher (vgl. dies. Zbl. **7**, 406), jedoch ohne Beweis, mitgeteilt worden sind. *O. Borůvka* (Brno).

Frankl, F., und R. Aleksejeva: Zwei Randwertaufgaben aus der Theorie der hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen auf Gasströmungen mit Überschallgeschwindigkeit. Rec. math. Moscou **41**, 483—499 u. dtsch. Zusammenfassung 500—502 (1934) [Russisch].

Bei stationären Gasströmungen mit Überschallgeschwindigkeit genügt das Geschwindigkeitspotential einer nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichung. Prandtl und Busemann (Gasdynamik, Handb. d. Experimentalphysik **4**, T. 1) sowie auch F. Frankl (Abh. Art.-Akad. UdSSR. **1934**) haben diese Gleichung für verschiedene Spezialfälle (für eine ebene oder achsensymmetrische Strömung usw.) graphisch gelöst. Hier wird ein Konvergenz- und Eindeutigkeitsbeweis für diese Methoden gegeben. Die Idee des Beweises ist der von Friedrichs und Lewy [Math. Ann. **99**, 200—212 (1928)] für die Auflösung einiger nichtlinearer hyperbolischer Differentialgleichungen verwandt. *Janczewski* (Leningrad).

Tocchi, Luigi: Sul problema delle lamine vibranti. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **72**, 153—168 (1934).

Das Dirichletsche Problem für die Gleichung $\Delta_2 u+\alpha u=-f$ wird mittels verallgemeinerter Potentialfunktionen auf eine Fredholmsche Integralgleichung zurückgeführt. Einfache Eigenschaften der Eigenwerte von α werden daraus abgeleitet. *G. Cimmino* (Napoli).

Muskat, Morris: A note on mixed boundary value problems in logarithmic potential theory. Physics **6**, 27—32 (1935).

Let the contour Γ bounding a region R be divided into two parts, Γ_1, Γ_2, neither necessarily connected, and suppose that, for each fixed P in R, $V(P,Q)$ is harmonic for Q in R and that $G(P,Q)=\log PQ+V(P,Q)$ vanishes on Γ_1 and has a zero normal derivative on Γ_2; then G is defined by the author as the mixed Green's function for Γ divided into Γ_1, Γ_2. If $U(P)$ is harmonic in R then we have formally in R

$$2\pi U(P)=\int_{\Gamma_1} U(Q)\,\partial G(P,Q)/\partial n\,ds-\int_{\Gamma_2} G(P,Q)\,\partial U(Q)/\partial n\,ds,$$

where Q is a point on the element of integration ds and n is the exterior normal. The author obtains G and thus the solution of the mixed boundary value problem for several particular cases. He starts with the case where R is the quarter-plane $0<x$, $0<y$ and Γ_1, Γ_2 are $y=0$, $0<x$ and $x=0$, $0\leqq y$ and proceeds by conformal mapping to other cases. He likewise considers the case of rectangles taking for Γ_1 a pair of opposite sides. The analysis is formal. A formula equivalent to the above was used by

Carl Neumann [Leipziger Berichte **61** (1909)] in his treatmant of the mixed boundary value problem. *Gergen* (Rochester).

Walsh, J. L.: Lemniscates and equipotential curves of Green's function. Amer. Math. Monthly **42**, 1—17 (1935).

This paper contains a detailed discussion of the geometric character of lemniscates and equipotential loci of Green's functions for plane regions. Several known results are recalled and new ones obtained. Principal among the latter are those embodied in the following theorem. Let $G(P)$ be Green's function with pole at infinity of an infinite region R with a finite boundary B. Let K denote the smallest convex point set containing B, Q a point exterior to K, and C the equipotential loci $G(P) = G(Q)$. Then: (a) Q is not a critical point of C; (b) the normal L to C at Q in the sense of decreasing G intersects K; (c) the radius of curvature of C at Q is not less than AP, where A is the point of $K \cdot L$ nearest to P; (d) if K subtends an angle less than 45° at Q then Q is not a point of inflection of C. Applications of this theorem are made to the study of lemniscates. Analogous results are obtained for generalized Green's functions, and, by inversion, for Green's functions with finite poles. The proof of the theorem rests on the formula

$$G(Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \partial G/\partial n \log PQ\, ds + g,$$

where Γ is an equipotential loci $G = k$ free from critical points, P is a point on the element of integration ds, n is the normal to C at P in the sense of increasing G, g is a constant, and $k < G(Q)$. This formula was used by Hilbert (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1897**, 63—70) for the case of a connected Γ. *Gergen* (Rochester).

Turner, A. Willard: The convergence of the Poisson integral of a point of approximate continuity for two variables. Tôhoku Math. J. **40**, 89—98 (1935).

The author extends some of her results on one variable (this Zbl. **9**, 18 and 463) to two. Her principal theorem can be stated as follows. Suppose that $f(\theta_1, \theta_2)$ is bounded and measurable for $-\Pi < \theta_1, \theta_2 \leqq \Pi$, and continuous at $(0, 0)$ relative to a set E such that $A(\eta_1, \eta_2) \equiv \{mE \text{ in } (-\eta_1, -\eta_2; \eta_1, \eta_2)\}/(4\eta_1\eta_2) \to 1$ as $(\eta_1, \eta_2) \to +0, +0)$. Let $L(\eta_1, \eta_2) \to 0$ as $(\eta_1, \eta_2) \to (+0, +0)$, decrease to 0 with each variable separately, and satisfy $A(\eta_1, \eta_2) > 1 - L(\eta_1, \eta_2)$. Then, if $0 < \varrho(\varphi)$, and $\varrho(\varphi) \to 0$ as $\varphi \to 0$ so slowly that $\varphi_1\varphi_2 L(2|\varphi_1|, 2|\varphi_2|) = o(\varrho(\varphi_1)\varrho(\varphi_2))$ as $(\varphi_1, \varphi_2) \to (0, 0)$, $\varphi_1 L(2|\varphi_1|, \varepsilon) = o(\varrho(\varphi_1))$ as $\varphi_1 \to 0$, $\varphi_2 L(\varepsilon, 2|\varphi_2|) = o(\varphi_2)$ as $\varphi_2 \to 0$, the latter two for every sufficiently small positive ε, it follows that the Poisson integral

$$u(r_1, r_2; \varphi_1, \varphi_2) = \int_{(-\pi,\, -\pi)}^{(\pi,\, \pi)} P(r_1, \theta_1 - \varphi_1)\, P(r_2, \theta_2 - \varphi_2)\, f(\theta_1, \theta_2)\, d(\theta_1, \theta_2),$$

$$P(r, \varphi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\varphi + r^2},$$

for f satisfies

$$u(1 - \varrho(\varphi_1), 1 - \varrho(\varphi_2); \varphi_1, \varphi_2) \to f(0, 0),$$

the approach being either as $(\varphi_1, \varphi_2) \to (0, 0)$ or in the repeated manner. A second theorem on unbounded functions is given. *Gergen* (Rochester).

Wavre, R.: Sur le problème inverse de la théorie du potentiel et les fonctions harmoniques multiformes. Comment. math. helv. **6**, 317—327 u. **7**, 131—140 (1934).

Die Arbeit ist eine Weiterführung früherer Untersuchungen des Verf. [C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 1238—1240 (1932), dies. Zbl. **6**, 58; Math. Z. **37**, 739—748 (1933), dies. Zbl. **7**, 410; Compositio Math. **1**, 69—84 (1934), dies. Zbl. **8**, 375] über die Mehrdeutigkeit von Potentialen bei analytischer Fortsetzung und über das Maß der Bestimmtheit von Belegungen, wenn ihr Potential im Kleinen bekannt ist. Es werden dabei auch verschiedene mit diesen Fragen zusammenhängende Ergebnisse gewonnen.

Wintner (Baltimore).

Lowan, Arnold N.: On the cooling of the earth. Amer. J. Math. 57, 174—182 (1935).

The temperature T at time t and at a distance r from the center is connected by means of the partial differential equations

$$\frac{\partial T}{\partial r} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \sigma\frac{\partial}{\partial t}\left(3\Psi + r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \Phi,$$

$$3r\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + 12\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 5\delta\frac{\partial T}{\partial r},$$

with quantities $\Phi(r, t)$, $\Psi(r, t)$ such that $\varrho C_v \Phi(r, t)$ is the heat generated per unit time per unit volume by the radioactive matter and $r\Psi$ is the increment of the radius vector which initially had the value r. In these equations C_v and C_p are the specific heats at constant volume and constant pressure, ϱ is the density, δ the coefficient of thermal expansion and σ a coefficient defined by the equation $3\sigma\delta C_v = C_p - C_v$. The supplementary conditions are that as $t \to 0$, $T \to f(r)$, $\Psi \to 0$ and that as $r \to R$, $T \to 0$ and $5\Psi + 3r\frac{\partial \Psi}{\partial r} \to 0$. The problem is solved by means of the Laplace transformation, a biorthogonal set of functions and the multiplication theorem for integrals of Laplace's type. *H. Bateman* (Pasadena).

● **Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Hrsg. v. Philipp Frank u. Richard v. Mises. Bd. 2. Physikalischer Teil. 2. verm. Aufl. zugleich 8. Aufl. v. Riemann-Webers Partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik.** Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn A.-G. 1935. XXIV, 1106 S. u. 110 Fig. RM. 60.—.

This volume opens with a new chapter on the optics of rays by Ph. Frank of Prague and includes articles by W. Glaser of Prague on dioptrics and the electron microscope. — Ch. II corresponds closely to ch. I of the first edition (1927). The new material deals with the plane oscillator, systems of uniform integrals, imprimitive systems, and approximate periods of n-fold periodic systems. This chapter on mechanics by Frank also contains a new section on statistical mechanics by W. Glaser which goes so far as to include a discussion of quasi-ergodic systems. — The next four chapters are practically the same as before. Section V has been moved forward to form section II. The articles on elasticity by E. Trefftz of Dresden have been retained but the article on motions with friction has been rewritten by G. Schulz of Berlin who employs a vector notation. There is a fuller discussion of flow between coaxial cylinders and some remarks are made on turbulent flow. Reynolds' law, the distribution of velocity in flow through pipes and the mathematical turbulence problem. Oseen's methods and the boundary layer theory are also presented. The article on ideal fluids has likewise been rewritten, the new author being R. v. Mises of Istanbul. — Section II on heat conduction and diffusion by R. Fürth of Prague has now become section III. It contains some new remarks on the integral equation of diffusion and its connection with statistics. It has been enlarged also by a useful discussion of the relation between diffusion theory and wave-mechanics. The connection with the unsharpness relation is pointed out. — Section IV on electromagnetic vibrations by A. Sommerfeld of Munich has now become section V. The article on the Hertzian vector and the radiation from an oscillating dipole has been enlarged. There is now a calculation of the optical intensity and a discussion of Eigenfunktionen and Eigenwerte. The other articles in this section are practically unchanged. — A new section on wave mechanics by G. Beck accounts for 112 of the Additional 252 pages and makes the book a most useful introduction to the intricate investigations of modern mathematical physics. The developments in recent years have, however, been so extensive that even a book of 1100 pages is not large enough to cover all applications of differential equations to physics. Researches relating to elastic fluids, supersonics, electroacoustics, electrical prospecting, high frequency electrical oscillations and many other subjects are not mentioned. These and some of the subjects of the present book belong rather to books on the differential equations of engineering and geophysics, but the plan upon which this book has been written is to make a selection or classification based on types of differential equation rather than on branches of physics. *H. Bateman* (Pasadena).

Spezielle Funktionen:

● **Bailey, W. N.: Generalized hypergeometric series. (Cambridge tracts in math. a. math. phys. Edited by G. H. Hardy a. E. Cunningham. Nr. 32.)** London: Cambridge univ. press 1935. VII, 108 S. 6/6.

Die klassische Theorie der gewöhnlichen hypergeometrischen Funktionen ist in Kleins Vorlesungen (neu herausgegeben von Haupt, 1933) dargestellt worden. Weiter sind gewisse

neuere Ergebnisse in der Richtung der Appellschen Untersuchungen in dem Buche von Appell und Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, 1926, enthalten. In dem vorliegenden Büchlein werden hauptsächlich neuere Untersuchungen über die verallgemeinerte hypergeometrische Reihe

$$ {}_pF_q\binom{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, z}{\varrho_1, \ldots, \varrho_q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \cdots (\alpha_p)_n}{n!\,(\varrho_1)_n (\varrho_2)_n \cdots (\varrho_q)_n} z^n, \quad (\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1), $$

behandelt, die sich vielfach an Hardys Arbeit aus dem Jahre 1923: „A chapter from Ramanujan's note-book" [Proc. Cambridge Philos. Soc. **21**, 492 (1923)] anschließen. — Inhaltsangabe: Nach einem kurzen Abriß der gewöhnlichen hypergeometrischen Reihe werden die Sätze von Saalschütz, Dixon, Watson und Whipple über ${}_3F_2$ bewiesen. Sodann folgt eine systematische Zusammenstellung der wichtigsten Transformationsformeln der allgemeinen ${}_pF_q$ nach drei verschiedenen methodischen Gesichtspunkten: 1. Durch Summierung von Reihen geringerer Ordnung, 2. durch Benutzung eines Dougallschen Satzes, kombiniert mit einem Carlsonschen Satze aus dem Phragmén-Lindelöfschen Ideenkreise, 3. durch die Barnesschen Kurvenintegrale. Dazu kommt eine Darstellung der speziellen Transformationsformeln für die sog. „well-poised" Reihen, d. h. für

$$ p = q + 1, \; 1 + \alpha_1 = \varrho_1 + \alpha_2 = \cdots = \varrho_q + \alpha_{q+1}. $$

Wir finden weiter einige Resultate über die Heineschen Basisreihen, in denen $(\alpha)_n$ durch

$$ (\alpha)_{q,n} = (1-\alpha)(1-\alpha q)\ldots(1-\alpha q^{n-1}) $$

ersetzt wird. Als Grenzfälle ergeben sich die Rogers-Ramanujanschen Identitäten. Auch eine kurze Darstellung der Appellschen hypergeometrischen Funktionen von zwei Veränderlichen wird gegeben. Einige vermischte Resultate (u. a. die interessanten älteren Identitäten von Cayley und Orr über gewöhnliche hypergeometrische Reihen), eine Sammlung von Beispielen und Aufgaben sowie eine Literaturzusammenstellung bilden den Abschluß des Buches.

Szegö (St. Louis, Mo.).

Geronimus, J.: On a class of Jacobian polynomials. Tôhoku Math. J. **40**, 222—225 (1935).

Es werden die Polynome $P_n(x)$ betrachtet mit der Eigenschaft

$$ \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\omega} P_n(x)\, P_k(x)\, dx = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 1 & n = k \end{cases}; \quad -1 < \omega < 1. $$

Ableitung der Formel

$$ \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\omega} \frac{dx}{y-x} = \frac{\pi}{\sin \pi\omega} \left\{ \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{\omega} - 1 \right\}, $$

$$ \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{\omega} = \frac{(-1)^n P_n(-y)}{P_n(y)} + r_n, $$

wo r_n für die Summe der Glieder mit y^{-k} ($k \geqq 2n+1$) steht. Die Summe der $(2k-1)$-ten Potenzen ($k = 1, 2, \ldots n$) der Nullstellen von $P_n(x)$ ist gleich ω. *O. Bottema.*

Poole, E. G. C.: The dual integral representations of Kummer's series ${}_1F_1(a; c; x)$. Proc. London Math. Soc., II. s. **38**, 542—552 (1935).

The ordinary hypergeometric function can be represented by forty-eight Eulerian integrals of the type $\int (1 - xt)^{\lambda} f(t)\, dt$. These can all be derived from two particular integrals by a change of variable, but the two integrals themselves can only be derived from one another by means of a multiple integral constructed by Wirtinger. This paper considers the analogues of these properties for the confluent hypergeometric function. Contour integrals are given which represent solutions of the equation satisfied by ${}_1F_1(a; c; x)$, and the correspondence of finite and infinite paths is considered. After a discussion of cases in which parameters may be integers, the analogue of Wirtinger's transformation is given, in which two solutions are transformed into one another by means of a double integral. *W. N. Bailey* (Manchester).

Nichols, G. D.: The explicit arithmetized Fourier series developments for certain doubly periodic functions of the second kind. Tôhoku Math. J. **40**, 252—258 (1935).

Verf. behandelt die Aufstellung der Fourierreihenentwicklungen für die Kuben

der Funktionen

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma}(x, y) = \vartheta_1' \frac{\vartheta_\alpha(x+y)}{\vartheta_\beta(x)\,\vartheta_\gamma(y)},$$

wo x, y unabhängige komplexe Variable sind, die ϑ die Jacobischen Thetafunktionen bedeuten und (α, β, γ) gewisse 16 unter den 64 Wertetripeln sind, die entstehen, wenn α, β, γ je die Zahlen 0, 1, 2, 3 durchlaufen. Der Wert solcher Entwicklungen liegt vorwiegend in ihrer Anwendbarkeit auf die Arithmetik der quadratischen Formen. Die mühsame Rechnungen erfordernde Herleitung der Formeln des Verf. wird nur sehr knapp skizziert unter Hinweis auf frühere Literatur, die zum Teil als methodisches Vorbild gedient hat. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Heegner, Kurt: Elliptische Funktionen und Kegelschnittbüschel. Math. Z. **39**, 663 bis 671 (1935).

Die Arbeit handelt von folgendem vom Verf. früher [Math. Z. **31**, 460, Abs. b (1930)] ohne Beweis mitgeteiltem Satz über elliptische Funktionen: „Gegeben sei ein elliptisches Integral erster Gattung von der allgemeinen Form $u = \int F_4(\xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi$ (F_4 Polynom vierten Grades) integriert bis x mit beliebiger aber fest gegebener unterer Grenze x_0. Die Umkehrungsfunktion sei $\varphi(u)$. Ferner seien u_1, u_2, u_3, u_4 vier voneinander unabhängige Argumente und s ihre halbe Summe. Sodann sind die nachstehenden Doppelverhältnisse einander gleich:

$$(\varphi(u_1),\, \varphi(u_2),\, \varphi(u_3),\, \varphi(u_4)) = (\varphi(s-u_1),\, \varphi(s-u_2),\, \varphi(s-u_3),\, \varphi(s-u_4))\text{.“} \quad (1)$$

Für diesen Satz wird jetzt der Beweis gegeben: Zuerst wird gezeigt, daß es genügt, den Satz für die spezielle Funktion $\wp u$ zu beweisen; dann werden die in den für $\wp u$ gebildeten Doppelverhältnissen auftretenden Differenzen von Werten der $\wp$-Funktion für zwei Argumente in bekannter Weise durch die σ-Funktion ausgedrückt, wodurch die zu beweisende Gleichung in eine identisch erfüllte Beziehung zwischen σ-Werten übergeht. Hiernach gibt Verf. einen „elementar-arithmetischen“ Beweis für den Ponceletschen Schließungssatz über Züge gerader Linien, die einem Kegelschnitt K einbeschrieben und gleichzeitig einem zweiten Kegelschnitt K' umbeschrieben sind. Der Beweis beruht auf einer aus dem Brianchonschen und dem Pascalschen Satz gefolgerten geometrischen Doppelverhältnisgleichheit. Bei passender Einführung elliptischer Funktionen läßt sich aus dieser Doppelverhältnisgleichheit mittels eines Grenzüberganges die Formel (1) folgern, womit ein schöner Zusammenhang zwischen zwei völlig unabhängigen Betrachtungen hergestellt ist. Indem weiter der Kegelschnitt K festgehalten wird, während für K' ein beliebiger einem Kegelschnittbüschel angehörender Kegelschnitt genommen wird, gewinnt Verf. durch Anwendung seines Satzes einen interessanten geometrischen Satz über Kegelschnittbüschel, dessen Anführung hier wegen Raummangels unterbleiben muß. Endlich wendet er den Satz auf Sieben- und Elfecke an, die einem Kegelschnitt einbeschrieben und einem anderen umbeschrieben sind, und gewinnt damit algebraische Beziehungen, die für die speziellen Sieben- und Elfteilungsgleichungen der elliptischen Funktionen von Bedeutung sind. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Soula: Une interprétation du théorème de M. Picard sur les équations intégrales. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 620—622 (1935).

$f(x)$ being of Lebesgue integrable square (L^2), and $Q(x,y)$ continuous and positive on $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$, the author considers under what conditions

$$H(g) = \frac{(\int f(x)\, g(x)\, dx)^2}{\int\int Q(x,y)\, g(x)\, g(y)\, dx\, dy}$$

is bounded in g and attains its maximum. If φ_n are the characteristic functions and λ_n^2 are the characteristic constants of $Q(x, y)$, if further f is orthogonal to all functions ψ such that $\int Q\psi = 0$, and $c_n = \int f\varphi_n$ then $H(g)$ is bounded if and only if $\sum \lambda_n^2 c_n^2 < \infty$ while the maximum is reached if in addition $\sum \lambda_n^4 c_n^2 < \infty$. If $Q(x, y) = \int K(x, s)\, K(y, s)\, ds$

then $H(g)$ is bounded if and only if $f(x) = \int K(x, s)\, h(s)\, ds$ has a solution in L^2, and attains its maximum if in addition $f(x) = \int Q(x, s)\, g(s)\, ds$ has a solution $g(s)$ in L^2. Indications are given for deriving similar properties for $R(g) = \int\int g Q_1 g / \int\int g Q g$, Q and Q_1 both positive. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Panow, D.: Über eine Anwendung der Methode von S. Tschaplygin zur Auflösung von Integralgleichungen. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr **6**, 843—883 u. dtsch. Zusammenfassung 884—886 (1934) [Russisch].

Der Verf. erstreckt auf die Lösung der Integralgleichungen die Methode welche S. Tschaplygin (Abh. Zentr. Aero-Hydrodyn. Inst. UdSSR. **1932** 130) für die angenäherte Lösung von Differentialgleichungen gegeben hat. Der Verf. betrachtet sowohl gewöhnliche Fredholmsche Integralgleichungen als auch Gleichungen von der Form

$$F(x, \varphi(x)) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0$$

(beide aber nur für genügend kleine Werte von λ). Es werden zwei Funktionenfolgen φ_ν und Φ_ν aufgebaut, für welche $\varphi_{\nu-1} < \varphi_\nu < \Phi_\nu < \Phi_{\nu-1}$ und $\lim \varphi_\nu = \lim \Phi_\nu = \varphi$ gilt $\left(\text{mit Konvergenz von der Ordnung } \frac{1}{2^{2^\nu}}\right)$, wobei die Korrekturen $\xi_\nu = \varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu$, $\eta_\nu = \Phi_\nu - \Phi_{\nu+1}$ aus geeigneten Hilfsintegralgleichungen bestimmt werden. Man kann auch die gesuchte Lösung durch solche Funktionen mit beliebiger Genauigkeit approximieren, für deren Auffindung nur Systeme algebraischer Gleichungen erster Ordnung gelöst werden müssen. *Janczewski* (Leningrad).

Janczewski, S. A.: Sur les équations de Fredholm complexes à noyaux uniformes. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 33—35 (1935).

The author states some results on integral equations in which one member is $y(z)$ or $y(z) - f(z)$ and the other is one of the following four integrals

$$\lambda \int_C K(z, t)\, y(t)\, dt, \qquad \lambda \int_C K(z, t)\, y(t)\, d\sigma,$$
$$\lambda \int_C K(z, \bar{t})\, y(t)\, d\sigma, \qquad \lambda \int_C K(z, \bar{t})\, y(\bar{t})\, d\sigma.$$

Here z is restricted to a domain D of the complex plane containing the curve C whose element of arc is $d\sigma$. $K(z, t) = G(z, t)/H(z, t)$ and $f(z)$ are single-valued analytic functions, $f(z)$ has no other singularities than poles $\{b_\mu\}$, K has fixed poles $\{e_\nu\}$ and singular lines $\{E_n\}$ along which $H(z, t)$ vanishes as t describes C. The solution $y(z)$ turns out to be analytic in D except for the sets $\{b_\mu\}$, $\{e_\nu\}$, and $\{E_n\}$. The order of a pole is never increased. The lines E_n are artificial cuts across which $y(z)$ can be continued if $\sigma'(t)$ and $\sigma''(t)$ are continuous on C. Angular points of E_n and the endpoints of C are normally logarithmic singularities. The difference in the values of $y(z)$ on the two sides of E_n can be determined. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Niemytzki, V.: Théorèmes d'existence et d'unicité des solutions de quelques équations intégrales non-linéaires. Rec. math. Moscou **41**, 421—438 (1934).

Die Sätze der Theorie der allgemeinen nichtlinearen Funktionaloperationen werden auf den Spezialfall der nichtlinearen Integralgleichungen angewendet. Die diesbezüglichen Darlegungen des Verf. bilden eine ausführliche Darstellung seiner C. R.-Note, über die bereits referiert wurde [vgl. C. R. **196**, 836—838 (1933); dies. Zbl. **6**, 209]. *Schauder* (Lwów).

Kuzmin, R.: Sur une classe de systèmes linéaires à une infinité d'inconnues. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr **4**, 515—543 u. franz. Zusammenfassung 544—546 (1934) [Russisch].

L'aut. recherche des solutions bornées des systèmes infinis:

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x_k + b_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

les coefficients étant soumis aux conditions: (A) $a_{nk} \geqq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1 - \varphi_n < 1$, $0 \leqq b_n < C\varphi_n$, ou bien (B): $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1 - \varphi_n < 1$, $|b_n| < C\varphi_n$. Dans le cas (A) il existe toujours une solution $x_n = \lim_{m\to\infty} x_n^{(m)}$, $0 \leqq x_n < C$, $x_n^{(m)}$ vérifiant le système réduit $x_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\, x_n^{(m)} + b_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$ — solution principale. Il existe en général d'autres solutions bornées; p. ex. la solution $x_n = 1$ du système

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) x_{2n} + \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k(k+1)} + \frac{1}{4n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

n'est pas principale. Si le système (A) a une solution unique (bornée), tout système (B) dont les valeurs absolues des coefficients sont moindres que les coefficients de (A), a aussi une solution unique; cette solution peut être obtenue par la méthode d'approximations successives. Une solution du système (A) ou (B) s'obtient toujours par cette méthode, si l'on prend pour première approximation $x_n^{(1)} = b_n$. L'auteur signale qu'une partie de ces résultats est déjà connue. *W. Stepanoff* (Moskau).

Löwig, Heinrich: Über allgemeine Spektralfunktionen. Čas. mat. fys. **64**, 153—154 (1935).

Variationsrechnung:

Janet, Maurice: Extrémales fortes et extrémales faibles, extrémales anguleuses. Bull. math. Fac. Sci. et grandes Écoles **1**, 3—12 (1934).

This paper discusses the determination of extreme values of the integral $\int (y'^4 + 6\, y y'^2 - 3 y^2)\, dx$, constructed for the purpose of bringing out the essential role of the corner point in the distinction between strong and weak extremals.

Arnold Dresden (Cambridge).

Neumann, Ernst Richard: Über die Brennpunktsbedingungen der Variationsrechnung. Math. Ann. **111**, 83—93 (1935).

The author discusses the non-parametric problem of the calculus of variations in the plane, with the end-point 1 variable on a curve K_1 and the end-point 2 variable on a curve K_2, and obtains a modification of the condition due to Bliss [Math. Ann. **58**, 80 (1904))]. The new form of the condition states that if x_1' and x_2' are the abscissae of the focal points of the curves K_1 and K_2 respectively, then $Q(x_1') \geqq Q(x_2') \geqq 0$, where $Q(x) = \varDelta(x, x_2)/\varDelta(x, x_1)$, $\varDelta(x, a) = u(x)\, v(a) - v(x)\, u(a)$, and $u(x), v(x)$ are linearly independent solutions of the Jacobi equations. *Graves* (Chicago).

Reid, William T.: Discontinuous solutions in the non-parametric problem of Mayer in the calculus of variations. Amer. J. Math. **57**, 69—93 (1935).

The author treats the general problem of Mayer with variable end points, and obtains extensions of known necessary conditions and sufficiency theorems to the case when the minimizing arc with equations $y_i = y_i(x)$ has one or more corners. The notion of admissible variation $\xi_s, \eta_i(x)$ is generalized so that the functions $\eta_i(x)$ are allowed to have discontinuities at the corners of the minimizing curve which are propertional to the discontinuities of the derivatives y_i'. The accessory boundary value problem associated with the second variation is considered. The boundary conditions involve the values of the functions $\eta_i(x)$ at the corners of the minimizing curve as well as at the ends of the main interval. By a device this boundary value problem is transformed to a form in which the boundary conditions involve the values of the functions only at the ends of the interval, and for which the existence and minimizing properties of the characteristic numbers have been previously established by the author [Amer J. Math. **54**, 769—790 (1932); this Zbl. **5**, 299. Ann. of Math. **35**, 836—848 (1934); this Zbl. **10**, 213]. The non-negativeness of the characteristic numbers of this boundary value problem is shown to be equivalent to the non-negativeness of

the second variation. When the characteristic numbers are all positive and the usual other conditions are satisfied, it is shown that fields of extremaloids may be constructed. However, in the statement of sufficient conditions for a minimum it is necessary to specify the behavior of the Weierstrass E-function on the extremaloids of a family of fields. *Graves* (*Chicago*).

Morse, Marston: Sufficient conditions in the problem of Lagrange without assumptions of normalcy. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 147—160 (1935).

Le titre indique l'objet du travail. L'auteur traite le problème classique de Lagrange dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions avec une méthode qui consiste essentiellement à employer le champ de Mayer des extrémales secondaires, c'est-à-dire des extrémales relatives à l'intégrale qui exprime la variation seconde (et à laquelle on ajoute les conditions accessoires convenables). Il arrive ainsi à démontrer qu'une extrémale fournit un minimum relatif si, sur elle, les conditions de Clebsch, Jacobi et Weierstrass sont vérifiées. *Adolphe Szücs* (Budapest).

● **Morse, Marston: The calculus of variations in the large. (Amer. math. soc. colloquium publ. Vol. 18.)** New York: Amer. math. Soc. 1934. IX, 368 S.

Most of the book is devoted to researches of Morse of the last decade. A part of the non-classical material presented is due to his students. Chap. I, The fixed end point problem in non-parametric form: An exposition of classical results in the problem of minimizing $\int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$ along a curve joining two points. Chap. II, General end conditions: Necessary and sufficient conditions for a minimum under general end conditions. The end conditions are in parametric form. Chap. III, The index form: The functional $\theta(\alpha) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$ is considered, subject to general end conditions. An index of the extremals considered is introduced, analogous to the index of a quadratic form. It ist the number of negative characteristic roots in a boundary problem in diff. equations associated with the extremal (accessary boundary problem). A quadratic form called the index form is introduced. The index of the quadratic form equals the index of the extremal. One of the applications is a second treatment of the problem of general end conditions. Chap. IV, Self-adjoint systems: A system of second order self-adjoint linear differential equations with self-adjoint boundary conditions is considered. Separation, comparison and oscillation theorems are among the results obtained. Chap. V, The functional on a Riemannian space: Here the problem is considered on an Riemannian space defined by a set of overlapping neighborhoods in each of which a metric is at hand. An invariantive formulation of the accessory boundary problem in tensor form is given. Chap. VI, The critical sets of functions: The now well known relations of Morse are derived under very general conditions. Critical points are classified into types, or sets of critical points are given type numbers. The relations involve the type numbers of the critical sets and the connectivities (Betti numbers) of the space. Several applications are given. Chap. VII, The boundary problem in the large: By introducing broken extremals determined by the vertices, the theory of critical points is made to yield definitions of critical extremals and their type numbers, and relations between the latter and the connectivities of certain domains are obtained. Chap. VIII, Closed extremals: Continuation of the preceding chapter to the more difficult case of closed extremals. The reversible case is the one treated, that is, where the extremal reversed in sense is again an extremal. Chap. IX, Solution of the Poincaré continuation problem: This ist the problem of the existence of closed geodesics on a convex surface. Morse's methods, the generalizations for functionals of the theory of critical points of functions, provide a new, precise solution of the problem, and with greatly extended results . . . The book has an index of names, but no index of terms. *A. B. Brown* (New York).

● **Lusternik, L., et L. Schnirelmann: Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels. I. Pt. Espaces à un nombre fini de dimensions. Traduit du russe par J. Kravtchenko. (Actualités scient. et industr. Nr. 188. Exposés sur l'analyse math. et ses applications. Publiés par J. Hadamard. III.)** Paris: Hermann & Cie. 1934. 51 S. et 5 Fig. Frcs. 15.—.

The first chapter consists principally of a topological introduction. The remainder of the Part is Chapter 2, Extremums des fonctions définies sur une multiplicité. A topological class of closed sets in a compact space is one which, if it contains a given set, contains every set obtainable from the latter by deformation. A function f is considered, with continuous second partial derivatives on a Riemannian manifold R, which latter is assumed

to be a complex in the sense of topology. On each of the closed sets of a topological class, f attains a maximum, and the minimum value of that maximum is called an essential value (valeur essentielle) and a set on which it is the maximum is called a minimal set. Theorem: If A_0 is a minimal set and c the essential value, and if R contains the intersection M of A_0 with the locus $f = c$, then M contains at least one critical point of f. This theorem is used in obtaining existance relations for critical points. Topological aids in the work are the idea of the category of a closed set, the minimum number of closed sub-sets, permissibly overlapping and not necessarily connected, which cover it and can each be deformed on R to a point. Another is the combinatorial category of a complex K on a manifold M: This is the minimum number of closed sub-sets S by which K can be covered, such that if a cycle on a set S bounds (mod. 2) on M, then it bounds on S. One of the applications ist to show the existence of solutions of a certain system of equations. — In Corollary 4, page 44, $k + 1$ should be replaced by k. There is a misstatement on page 38, lines 22 and 23 (points 2 and 3 may coincide without there being a continuum of critical points). It appears to the ref. that on page 22, line 15, "fermée" should be replaced by "self-compact", and that the writers have later assumed, without mention or proof, that a topological class of closed sets on an ordinary closed manifold (e. g., torus) is self-compact. *A. B. Brown* (New York).

Funktionentheorie:

Botea, N.: Sur un théorème de M. Pompeiu. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **4**, 3—6 (1933).

Wiedergabe eines Teilsatzes der in dies. Zbl. **8**, 317 referierten Note mit anderem Beweis. *Karamata* (Beograd).

Heuser, Paul: Über die Teilsummen beschränkter Potenzreihen. Math. Z. **39**, 660 bis 662 (1935).

$f(z) = \sum a_n z^n$ sei für $|z| = r$ absolut konvergent. $M(r)$ sei das Maximum von $|f(z)|$ auf $|z| = r$ und $\mathfrak{M}(r)$ das Maximum von $\sum |a_n| r^n$. Eine elementare Betrachtung liefert für alle Abschnitte $|s_n(z)| \leqq \frac{1}{2}(M(r) + \mathfrak{M}(r))$. Hieraus gewinnt Verf. Abschätzungen für die Teilsummen beschränkter Potenzreihen, die allerdings wenig scharf sind. *Rogosinski* (Königsberg).

Kössler, M.: Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginärteile. Čas. mat. fys. **64**, 150—151 (1935).

Chen, Kien-kwong: On the theory of schlicht functions. Tôhoku Math. J. **40**, 160 bis 174 (1935).

On sait d'après un théorème de M. M. Littlewood et Paley (voir ce Zbl. **5**, 18, et Landau, ce Zbl. **6**, 212) que si $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ est une fonction univalente pour $|z| < 1$ et impaire, alors $|a_n| < A$. L'A. démontre que $|a_n| < e^2$. D'autres théorèmes sont établis pour les fonctions f univalentes dans $|z| < 1$ et telles que $f(\omega z) = \omega f(z) \left(\omega = e^{\frac{2\pi i v}{x}}\right)$. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Leja, F.: Les suites de polynomes et la représentation conforme. Čas. mat. fys. **64**, 151—153 (1935).

Cioranesco, Nicolas: Sur le développement d'une fonction analytique de fonction analytique et sur quelques conséquences. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 627—629 (1935).

L'A. indique un algorithme permettant d'obtenir le développement en série de puissances de la fonction $F[\varphi(z)]$, lorsque F et φ sont holomorphes à l'origine $(|\varphi(0)| < R =$ rayon d'holomorphie de $F)$. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Onofri, Luigi: Su una speciale classe di serie di funzioni analitiche. II. mém. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **13**, 209—225 (1935).

L'A. continue ses recherches sur la possibilité de représenter les fonctions analytiques par des séries de la forme $\sum a_n z^n f_n[\varphi^{p_n}(z)]$, où f et φ sont des fonctions entières données, et où les p_n sont des entiers. L'A. cherche aussi à déterminer les singularités de la fonction ainsi représentée. (I. voir ce Zbl. **7**, 303.) *Mandelbrojt.*

Cartwright, Mary L.: Some generalizations of Montel's theorem. Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 26—30 (1935).

Il s'agit du th. de Montel: Si $f(z)$ est holomorphe pour $|\arg z = \theta| \leqq \alpha$,

$|z| \leqq 1$ sauf peut-être pour $z = 0$, est bornée dans ce domaine, et si $f(z) \to 0$ lorsque $z \to 0$ le long d'un rayon $\theta = \beta$, $|\beta| < \alpha$, $f(z)$ tend uniform. vers 0 lorsque $z \to 0$ avec $|\theta| \leqq \alpha - \delta$, $\delta > 0$ arbitraire (Ann. Ecole norm. **1912**). Ce th. fut généralisé par Hardy et Littlewood (Proc. London Math. Soc. **1918**). En s'inspirant de l'énoncé d'un th. de Milloux (Mathematica **1930**) l'auteur démontre ceci: $f(z)$ est sup. holomorphe et bornée pour $|\theta| < \alpha$, $|z| < 1$, et continue sur la frontière sauf peut-être pour $z = 0$. On donne H et β, $0 \leqq H < 1$, $0 \leqq \beta < \alpha$. On suppose de plus que, à tout $\varepsilon > 0$ correspond $R(\varepsilon)$ tel que, si $r < R < R(\varepsilon)$, on a $|f(re^{i\theta})| < \varepsilon$ pour au moins un $\theta = \theta(r)$, $|\theta(r)| \leqq \beta$, sauf pour les r appart. à un ens. de mesure HR. Dans ces conditions, $f(z)$ tend unif. vers 0 lorsque $z \to 0$ avec $|\theta| \leqq \alpha - \delta$, $\delta > 0$ arbit. La démonst. s'inspire de celle de Montel (on pourrait la déduire du th. de Milloux, et par suite sup. seulement l'exist. de valeurs except. (voir Valiron, Ann. Ecole norm. **1930**). En appliquant le secteur sur un cercle et utilisant la formule de Poisson-Jensen-Nevanlinna puis le th. de Fatou, l'aut. montre en outre que la conclusion reste valable si les points où $|f(z)| < \varepsilon$ sont sur la frontière. Diverses généralisations sont signalées.

G. Valiron (Paris).

Mordoukhay-Boltovskoy, D.: Sur les facteurs primaires de la fonction entière transcendente du genre infini. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. **10**, 77—85 (1934).

Si r_n est le module du $n^{\text{ième}}$ zéro d'une fonction entière (les r_n étant rangés en une suite non décrois.) l'exposant $p = p_n$ qui intervient dans la décomposition en facteurs de Weierstrass doit rendre la série $\sum (r/r_n)^{p+1}$ convergente quel que soit r. Borel a montré brièvement (Acta math. **20**; Leçons sur les fonctions entières) qu'il suffit de prendre $1 + p_n = E[k \log n / \log r_n] = \varphi(n)$, $k > 1$. [Ceci n'est vrai que si $\varphi(n)$ tend vers l'infini, sinon il faut prendre $p_n = \varphi(n)$ (remarque du réf.).] L'auteur s'est proposé d'abaisser la valeur de Borel. La plus simple qu'il donne est $p_n = E\left[\dfrac{\log n - \gamma \log_2 n}{\log r_n - (\log r_n)^h} - 1\right]$, $\gamma > 0$, $0 < h < 1$. La démons. dans laquelle l'a. remplace p_n par le crochet n'est pas probante. Mais en supprimant -1 dans le crochet le résultat est exact et peut être établi cor. Il en serait sans doute de même des autres r. de l'a.

G. Valiron (Paris).

Bernstein, Vladimiro: Sulla distribuzione degli zeri delle trascendenti intere. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **72**, 99—124 (1934).

$f(z)$ étant une fonction entière, $f(0) \neq 0$, on considère sa dérivée log., $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \sum s_n z^n$ et la f. entière $F(z) = \sum s_n z^n / \Gamma(1 + cn)$ qui lui est associée dans la méthode de s. de Borel ($c = 1$) ou dans celles de Mittag-Leffler. L'a. étudie en détail les relations entre la position des zéros de $f(z)$ et les propriétés de l'indicatrice de Lindelöf de $F(z)$ ou la situation des directions de Borel du type max. de $F(z)$. Il montre par ex. que, dans le cas de Borel ($c = 1$): pour que les zéros de $f(z)$ soient réels positifs, l'un d'eux au moins existant, il faut et il suffit que $h(\varphi) = \overline{\lim} \dfrac{\overset{+}{\log}|F(re^{i\varphi})|}{r}$ soit égal à $a \cos\varphi$, $a > 0$, pour $0 \leqq |\varphi| \leqq \frac{\pi}{2}$ et à 0 pour les autres φ. Pour que tous les zéros de $f(z)$ soient réels, l'un au moins positif, l'un au moins négatif, il f. et il s. que $h(\varphi) = a \cos\varphi$, $a > 0$, pour $0 \leqq |\varphi| \leqq \frac{\pi}{2}$ et $h(\varphi) = b\,|\cos\varphi|$, $b > 0$, pour $\frac{\pi}{2} \leqq |\varphi| \leqq \pi$. Pour que tous les zéros soient réels, l'un au moins existant, il f. et il s. que les deux directions $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ soient les seules dir. de Borel du type max. de $F(z)$. Les r. peuvent s'étendre dans la dir. indiquée par l'a. dans un a. travail (ce Zbl. **8**, 264); ils sont liés à ceux de Subbotin (ce Zbl. **1**, 146), de Valiron (ce Zbl. **4**, 262) et de Miss Cartwright (ce Zbl. **4**, 403).

G. Valiron (Paris).

Miniatoff, Alexandre: Sur une propriété des transformations dans l'espace de deux variables complexes. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 711—713 (1935).

Verf. überträgt den Satz von Julia: „Bildet die im Einheitskreise analytische Funktion $w = f(z)$ diesen auf einen Teilbereich von sich ab und ist $\lim\limits_{z_n \to 1} f(z_n) = 1$, $\lim\limits_{z_n \to 1} f'(z_n) = \gamma$, so gilt für $|z| < 1$:

$$\frac{|w-1|^2}{1-|w|^2} \leqq \gamma \frac{|z-1|^2}{1-|z|^2}\text{“}$$

auf folgende Bereiche im Raume zweier komplexer Veränderlichen: 1. Hyperkugel $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$. 2. Dizylinder $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$. 3. Bereiche, die gewissen Bedingungen von St. Bergmann [Existenz von Vergleichskörpern, s. St. Bergmann, J. reine angew. Math. **169**, 1—42 (1933); dies. Zbl. **6**, 66 und **172**, 89—128 (1934); dies. Zbl. **10**, 309] genügen. *Behnke* (Münster i. W.).

Fuchs, Boris: Limitation pour la variation d'un angle dans le cas d'une transformation pseudoconforme dans l'espace de deux variables complexes. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 718—720 (1935).

Verf. betrachtet in bezug auf die von St. Bergmann (dies. Zbl. **9**, 262; **10**, 309 u. 310) eingeführte Metrik eines vorgegebenen Bereiches $\mathfrak{B}$

$$ds^2 = \sum T_{m\bar{n}}\, dz_m\, d\bar{z}_n, \qquad T_{m\bar{n}} = \frac{\partial^2 \log K}{\partial z_m\, \partial \bar{z}_n} \quad (K = \text{Kernfunktion von } \mathfrak{B}).$$

Vektoren X und Y mit dem gleichen Anknüpfungspunkt P. X und Y bestimmen zwei analytische Ebenen mit einem (euklidisch zu messenden) Winkel f. Bei einer pseudokonformen Abbildung von $\mathfrak{B}$ gehen X und Y in X' und Y' über, deren analytische Ebenen einen Winkel f' bilden. Für f' werden Schranken angegeben, die nur von f und den Koeffizienten der Hermiteschen Form abhängen. *Behnke.*

Thullen, Peter: Sur le deuxième problème de Cousin. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 720—721 (1935).

D désigne un domaine univalent (dans l'espace de 2 variables complexes). On dit que le deuxième théorème de Cousin est vrai pour D si, de quelque façon qu'on recouvre D avec un ensemble dénombrable de domaines partiels D_i, et qu'on se donne, dans chaque D_i, une fonction holom. φ_i (pourvu que, dans la partie commune à D_i et D_j, le quotient φ_i/φ_j reste fini et non nul), il existe une fonction Φ, holom. dans D, et telle que, dans chaque D_i, Φ/φ_i reste fini et non nul. — L'auteur annonce le théorème: si $H(D)$ désigne le dom. d'holomorphie associé à D („Regulariätshülle“), et si le deuxième théorème de Cousin est vrai pour D, alors $H(D)$ est contenu dans la fermeture de D. C'est un cas particulier d'un théorème général sur les singularités des variétés caractéristiques. *Henri Cartan* (Strasbourg).

● **Sobrero, Luigi: Theorie der ebenen Elastizität unter Benutzung eines Systems hyperkomplexer Zahlen. (Hamburg. math. Einzelschriften H. 17.)** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1934. 51 S. RM. 4.—.

Es handelt sich um einer hyperkomplexe Algebra, deren Elemente die Form haben

$$z = a_0 + j a_1 + j^2 a_2 + j^3 a_3,$$

und bei der gerechnet wird auf Grund der Relation

$$1 + 2j^2 + j^4 = 0.$$

Es zeigt sich, daß alle Rechengesetze erfüllt sind mit Ausnahme der Umkehrbarkeit der Multiplikation. Diese ist nur dann nicht umkehrbar, wenn

$$a_0 = a_2 \text{ und } a_1 = a_3.$$

Ganz analog zur gewöhnlichen Funktionentheorie kann man auch hier eine Funktionentheorie aufbauen, indem man die vier Größen a_i als Funktionen von vier Veränderlichen x, y, u, v auffaßt und die Existenz eines von der Richtung unabhängigen Differentialquotienten fordert. — Man betrachtet zunächst nur die vier Achsen-

richtungen und gelangt zu zwölf „Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen" von denen die ersten vier lauten

$$a_y = -d_x, \quad b_y = a_x, \quad c_y = b_x - 2d_x, \quad d_y = c_x.$$

Diese erweisen sich auch als hinreichend für die Unabhängigkeit nach jeder Richtung. Der übrige Aufbau dieser Funktionentheorie läßt sich, wie der Verf. zeigt, ziemlich weitgehend wie bei der gewöhnlichen Funktionentheorie durchführen. Die Anwendbarkeit auf die Elastizitätstheorie beruht darauf, daß sich die vier Größen a_i auf Grund der „Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen" als Bipotentiale erweisen. Es werden der Reihe nach identifiziert σ_x, σ_y, τ mit $-c, a, d$. Sehr einfache Integralausdrücke ergeben sich für Größe und Moment der von den Spannungen längs eines Kurvenstückes ausgeübten Kraft sowie für die Verschiebungskomponenten. Als Anwendungen werden besprochen a) unendliche Scheibe mit Einzelkraft, b) Halbebene mit Einzelkraft [vgl. E. Melan, Z. angew. Math. Mech. **12**, 343 (1932)], c) lokale Störungen in der Beanspruchung einer ebenen Scheibe in der Umgebung eines kreisförmigen Loches [vgl. Kirsch, Z. Ver. Deutsch. Ing. **42** (1898)]. *Funk* (Prag).°°

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Hostinský, B.: Sur les progrès récents de la théorie des probabilités. Čas. mat. fys. **64**, 94—106 (1935).

Reichenbach, Hans: Bemerkung zu H. Blumes finiter Wahrscheinlichkeitsrechnung. Z. Physik **93**, 792—794 (1935).

Durch einige Äußerungen der Blumeschen Abhandlung (vgl. dies. Zbl. **10**, 172) veranlaßt, bespricht Verf. das Problem der Finitisierung der Wahrscheinlichkeitsfolgen. In der formalen Wahrscheinlichkeitsrechnung sei dieselbe leicht durchführbar, aber nicht erforderlich. In der inhaltlichen (insbesondere physikalischen) Wahrscheinlichkeitsrechnung ist sie augenscheinlich von Bedeutung; eine tiefere Einsicht läßt jedoch erkennen, daß die spezifischen Schwierigkeiten der Theorie durch die Finitisierung nicht überwunden werden; vielmehr soll nur die Wahrscheinlichkeitslogik imstande sein, dieselben zu beseitigen. *A. Khintchine* (Moskau).

Menger: Bernoullische Wertlehre und Petersburger Spiel. Erg. math. Kolloqu. H. **6**, 26—29 (1935).

Bekanntlich suchte D. Bernoulli das mit dem Petersburger Spiel verbundene psychologische Paradoxon durch die Einführung einer „moralischen" an Stelle der mathematischen Erwartung zu lösen. Es wird bemerkt, daß dies schon aus formalen Gründen unmöglich ist; denn zu jedem angebbaren unbeschränkten Ausdruck für diese moralische Erwartung läßt sich ein dem Petersburger analoges Spiel ersinnen, bei welchem die moralische Erwartung unendlich wird. *A. Khintchine* (Moskau).

Schoenbaum, Emil: Mathematische Statistik. Čas. mat. fys. **64**, 124—131 (1935) [Tschechisch].

Fisher, R. A.: The logic of inductive inference. J. Roy. Statist. Soc., N. s. **98**, 39—82 (1935).

Vortrag über die prinzipiellen und methodischen Probleme bei der Aufgabe, von einem gegebenem Kollektiv aus auf Eigenschaften der Gesamtheit, aus der das Kollektiv entnommen ist, zu schließen. Es handelt sich um eine Zusammenfassung der in verschiedenen Arbeiten dargelegten Untersuchungen des Verf. über die Grundlagen der Statistik. Ein Bericht über die Einzelheiten der sehr interessanten Ausführungen ist in dem hier gegebenen Rahmen leider nicht möglich. — Die merkwürdig scharf geführte anschließende Diskussion (S. 55—82) enthält Beiträge von Bowley, Isserlis, Irwin, Wolf, Pearson, Greenwood, Jeffreys, Barlett, Neyman. *Feller.*

Kullback, Solomon: An application of characteristic functions to the distribution problem of statistics. Ann. math. Statist. 5, 263—307 (1934).

The author extends the existing theorems concerning the existence of the characteristic function (moment generating function) of a function $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in which

he variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obey a continuous distribution law, and the consequent lerivation of the distribution law of u to the case in which u may have at most a deumerable infinity of discontinuities. He extends his results to find the simultaneous listribution law of several such functions u of the same set of variables. He gives everal applications of this method of solving distribution problems, making effective se of the calculus of residues in evaluating the integrals that arise. Besides obtaining ome of the known but important results in sampling from normal populations, he preents some new results for the geometric mean in sampling from rectangular and type III niverses, and, of particular note, solves the distribution problem for Wilks' genealized variance in samples from a normal multi-variate population. *C. C. Craig.*

Weida, Frank M.: On measures of contingency. Ann. math. Statist. **5**, 308—319 1934).

The author applies an abstract formulation of probability due to J. L. Coolidge, nd the use of characteristic functions over a set to the theoretical interpretation of arious familiar measures of contingency due to Pearson and to Gini.

Albert A. Bennett (Providence).

Dieulefait, Carlos E.: Contribution à l'étude de la théorie de la corrélation. Bionetrika **26**, 379—403 (1934).

The author devotes Part I to an exposition of the developments of frequency inctions of one variable in series of orthogonal polynomials following the methods f Chebysheff. Recursion relations involving determinants of moments are obtained. he bearings of these results upon the views of Gram, K. Pearson [Biometrika **13**, 96 (1921)], and V. Romanovsky [Biometrika **19**, 93 (1927)], are pointed out. While ne Pearson curves of Types I, II, and III were obtained by this method by Romaovsky, Biometrika **16**, 106 (1924), the applications to Types V and VI were first nade by the author recently and are redeveloped here. In Part II, the regression arabolas of n-th order are treated by the method of Part I. In particular, the work f J. Neyman, Biometrika **18**, 257 (1926), is discussed critically. The author next pplies the previous methods to the general correlation surface when expressed in the orm $f(x, y) = \psi(x)\,\varrho(y) \sum_s \sum_j \omega_{sj} X_s(x)\, Y_j(y)$ where $X_s(x)$ and $Y_j(y)$ are polynomials n x and y of degrees s and j and orthogonal to $\psi(x)$ and $\varrho(y)$ respectively. The coficients ω_{sj} are determined by Fourier's method. The coefficients of correlation, ne "clitics" and "kurtics" (involving respectively third and fourth moments), are ll obtained for the general case. In Part III, the author prepares for the application f the general methods to cases of prescribed marginals of Pearson's several types. he author emphasizes the correlation surface itself in contrast to the securing of all econdary information through the regression coefficients alone. *A. A. Bennett.*

Dieulefait, Carlos E.: Verallgemeinerung des Abhängigkeitskoeffizienten einer Korrelation. An. Soc. Ci. Argent. **117**, 260—262 (1934) [Spanisch].

Bezeichnet man mit $z = f(x, y)$ die Korrelationsfläche, mit $\bar{y}_x = \theta(x)$ die Reressionslinie und mit $\sum_y^2$ die komplexive Dispersion der Punkte (x, y):

$$\sum\nolimits_y^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,[y - \theta(x)]^2\,dx\,dy,$$

o kann man dies nach Einführung des arithmetischen Mittels $\bar{y}$ der y in die Form ringen:

$$\sum\nolimits_y^2 = \sigma_y^2 + \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\{[\theta(x) - \bar{y}] - (\bar{y}_x - \bar{y})\}^2\,dx\,dy - \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,[\bar{y}_x - \bar{y}]^2\,dx\,dy.$$

[an erkennt aus der Betrachtung der beiden extremen Fälle (funktionale Abhängigkeit nd Unabhängigkeit), daß die komplexive Dispersion der Ungleichung

$$0 \leqq \sum\nolimits_y^2 \leqq \sigma_y^2 + (k - \bar{y})^2$$

genügt; als Abhängigkeitskoeffizient der Korrelation wird man danach definieren

$$\xi_{yx}^2 = 1 - \frac{\sum_v^2}{\sigma_y^2 + (k - \bar{y})^2}.$$

Ist der Mode k der y gleich dem arithmetischen Mittel, so erhält man den Koeffizienten von Pearson. *F. Knoll* (Wien).

Koeppler, Hans: Das zweiändrige Wahrscheinlichkeitsgesetz bei Beständen von Versicherungen mit zwei verschiedenen Auflösungsmöglichkeiten. Giorn. Mat. Finanz. II. s. **4**, 109—133 (1935).

In Fortsetzung seiner früheren Abhandlungen (vgl. dies. Zbl. **7**, 356) behandelt der Verf. Gesamtheiten mit mehreren Ausscheideintensitäten. Betrachtet wird ein Bestand von s Versicherungsverträgen; in einem bestimmten Augenblick sei für jeden dieser s Verträge die rechnungsmäßige Reserve $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_s$ bereitgestellt. Mit K_1 werde der auf diesen Augenblick abgezinste Wert aller künftigen Leistungen und mit K_2 der ebenso abgezinste Wert aller künftigen Einnahmen des Versicherers bezeichnet. Bei genau rechnungsmäßigem Verlaufe des Ausscheidens wäre $\sum_{\lambda=1}^{s}\mathfrak{V}_\lambda = K_1 - K_2$. In Wirklichkeit treten Abweichungen vom rechnungsmäßigen Verlauf ein und die Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung der Wertepaare K_1, K_2 sei $P(K_1, K_2)$. Eine Anwendung der Methode der erzeugenden Funktionen ergibt die Beziehung $\iint P(K_1, K_2)\,[K_1 - K_2 - \sum_{\lambda=1}^{s}\mathfrak{V}_\lambda]^2 dK_1 dK_2 = \sum_{\lambda=1}^{s} M_\lambda^2$, wo M_λ^2 das fernere mittlere Risikoquadrat der λ-ten Versicherung bedeutet. Mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung findet man daraus eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit einer Abweichung der Größe $K_1 - K_2$ von der rechnungsmäßigen Gesamtreserve $\sum_{\lambda=1}^{s}\mathfrak{V}_\lambda$. Unter der Annahme, daß $P(K_1, K_2)$ ein zweidimensionales Gaußsches Wahrscheinlichkeitsgesetz ist, werden sämtliche Konstanten dieses Gesetzes berechnet. In weiteren Teilen der Arbeit wird gezeigt, daß das so dargestellte $P(K_1, K_2)$ nach einer einfachen Variablentransformation der Differentialgleichung

$$\frac{\partial P}{\partial s} = a_{11}\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v} + a_{22}\frac{\partial P}{\partial v^2}$$

genügt. *Birnbaum* (Lwów).

Romanov, N. A.: Sur la possibilité d'un contact entre le calcul des probabilités et la théorie des réflexes conditionnels du prof. I. P. Pavlov. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 193—200 u. franz. Zusammenfassung 200 (1935) [Russisch].

Geometrie.

Helmer-Hirschberg, Olaf: Axiomatischer Aufbau der Geometrie in formalisierter Darstellung. Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin **2**, 175—201 (1935).

Eine streng logistische Einkleidung der Hilbertschen Axiome (und Zusatzerklärungen) der Geometrie, wobei der Autor sich nach Möglichkeit an die Hilbertsche Fassung gehalten hat; nur bei Winkelkongruenz und Vollständigkeit ist naturgemäß auf logistisch angenehmere Fassungen zurückgegriffen. Ein Axiom der Gestalt

$$\prod_{\nu=1}^{3}(x_\nu)\,K_W(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$$

fehlt; der Autor erklärt ein solches irrtümlich für überflüssig. (Anderer Irrtum S. 18[illegible] Zeile 16—18.) *Arnold Schmidt* (Göttingen).

Hertz, P.: Sur les axiomes d'Archimède et de Cantor. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 16) **51**, 179—181 (1934).

Ein Vortrag, in dem der Autor einen gemeinsam von ihm und P. Bernays gefundenen Beweis des folgenden Satzes kurz skizziert: So wie von der üblichen metr

chen Fassung des Cantorschen Axioms (Existenz eines Punktes auf allen Strecken iner Folge ineinandergeschachtelter Strecken, deren Längen gegen Null konvergieren) st das Archimedische Axiom auch noch von der stärkeren topologischen Fassung des Cantorschen Axioms (die aus der metrischen bei Weglassung der Konvergenzbedingung hervorgeht) unabhängig. — Ein nichtarchimedisches Streckenystem wird durch ein aus $\aleph_1$ Schritten bestehendes Verfahren erweitert; das Unbhängigkeitsmodell ist ein Modul, der dieses erweiterte Streckensystem zur Basis hat.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Sz. Nagy, Julius v.: Zur Theorie der geometrischen Konstruktionen. Tôhoku Math. J. **40**, 76—78 (1935).

Elementarer Beweis des Satzes: Jede mit dem Lineal und Zirkel ausführbare Konstruktion kann allein mit dem Lineal ausgeführt werden, wenn auf dem Zeichenblatte ein beliebig kleiner Bogen eines Kreises und der Mittelpunkt des Kreises gezeichnet vorliegt. — Der Verf. betrachtet seinen Satz als neu und behauptet, daß dieser, im Gegensatz zur Meinung von Kubota [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **37**, 71—73 (1928)], nicht schon von Obláth [Mh. Math. Phys. **26**, 295—298 (1915)] bewiesen worden sei. — (Der Ref. glaubt sich dieser letzten Aussage anschließen zu können, bemerkt aber, daß der Satz des Verf. jedenfalls schon 1904 von Severi bewiesen worden ist [Rend. Circ. mat. Palermo **18**, 256—259 (1904)]. Einen Beweis findet man übrigens auch bei Mordoukhay-Boltovskoy [Period. Mat., IV. s. **14**, 101—111 (1934); dies. Zbl. **8**, 402].) *O. Bottema* (Sappemeer, Niederlande).

Alexandrov, A.: Déduction des parallélоèdres non normaux à 4 dimensions. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr **6**, 803—817 u. franz. Zusammenfassung 817 (1934) [Russisch].

L'auteur s'occupe de la question de partition de l'espace à 4 dimensions à l'aide des parallélоèdres. Il y a deux manières d'une partition pareille: 1° à l'aide des parallélоèdres normaux où tous les parallélоèdres sont égaux dont deux voisins ont une entière face commune et 2° à l'aide des parallélоèdres non normaux c'est à dire non égaux mais homotétiques. L'auteur étudie ce dernier cas et obtient le résultat suivant: Il existe six parallélоèdres pareils topologiquement différents. Un d'eux est limité par douze prismes hexagonaux. Les parallélоèdres de ce type ne divisent l'espace que dans le cas où ils sont égaux entre eux. Les cinq autres types sont des prismes dont les bases sont des parallélоèdres à trois dimensions. Pour diviser l'espace ils ne doivent pas être égaux entre eux. — L'auteur indique la relation de son investigation avec celles des autres géomètres en particulier avec les travaux de M. Delaunay. *Nil Glagoleff* (Moscou).

Segre, B.: Proprietà in grande delle linee piane convesse: Le orbiformi e le corrispondenze equilonghe fra ovali. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **20**, 455—458 (1934).

I. vgl. dies. Zbl. **10**, 370. Es wird eine Reihe weiterer Sätze über konvexe Kurven, insbesondere Kurven konstanter Breite angekündigt. Es handelt sich einerseits um einfache Ungleichungen für beliebige konvexe Kurven und damit zusammenhängende Extremumeigenschaften von Kurven konstanter Breite, die allerdings bekannt sind oder aus bekannten Sätzen leicht entnommen werden können, andererseits um folgenden Satz: Haben zwei konvexe Kurven C und C' in jeder Richtung gleiche Breiten, so besitzt die Differenz der Krümmungen in Punkten von C und C' mit gleichsinnig parallelen Tangenten wenigstens drei positive Maxima und drei negative Minima. Daraus ergeben sich durch Spezialisierung u. a. die bekannten Sätze: Eine Kurve konstanter Breite hat wenigstens sechs Scheitel. Auf jeder konvexen Kurve gibt es wenigstens drei Paare von Punkten, so daß in den Punkten jedes Paares die Tangenten parallel und die Krümmungen gleich sind. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Haupt, Otto: Nachtrag zur Arbeit „Ordnungsfeste Erweiterung ebener Bogen und Kurven". Math. Z. **39**, 777 (1935).

Ergänzung des Beweises des einen Satzes des Verf. (vgl. dies. Zbl. **9**, 268). *Sz. Nagy.*

Wald: Zur Differentialgeometrie der Flächen. I. Eine neue Definition der Flächenkrümmung. Erg. math. Kolloqu. H. **6**, 29—39 (1935).

μ sei ein metrischer Raum, PQ bezeichne die Entfernung der Punkte P, Q und $D_r(P_0, \ldots, P_3)$ bzw. $E_r(P_0, \ldots, P_4)$ die Determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \left(2r \sin \frac{P_i P_j}{2r}\right)^2 \end{vmatrix}$ bzw. $\left|\left(2r \sin \frac{P_i P_j}{2r}\right)^2\right|$. Liegen die Punkte $P_0, \ldots, P_3$ auf einer zweidimensionalen Kugel S_r des (reellen oder imaginären) Radius r eines Euklidischen Raumes R_n, so gilt, wenn $P_i P_j$ den auf S_r gemessenen Abstand bedeutet, $\frac{1}{r^2} = -\frac{2 D_r(P_0, \ldots, P_3)}{E_r(P_0, \ldots, P_3)}$. Diese Beziehung wird zur Einführung einer Flächenkrümmung benutzt, und zwar so: Die Punktetripel $P_1^\nu, P_2^\nu, P_3^\nu$ bilden eine sog. P_0-Folge, wenn sie folgende Bedingungen erfüllen: 1. $\lim P_1^\nu = \lim P_2^\nu = \lim P_3^\nu = P_0$. 2. Die Zahlensextupel $\frac{P_i^\nu P_j^\nu}{\operatorname{Max}_{i,j} P_i^\nu P_j^\nu}$ $(P_0^\nu = P_0$ für alle $\nu)$ haben kein Häufungssextupel, das als Abstandssystem vierer Punkte einer Kreislinie des R_2 gedeutet werden kann. 3. Für keine Teilfolge $\{\nu_k\} \subset \{\nu\}$ gilt identisch (in r) $\lim_{k \to \infty} -\frac{2 D_r(P_0^{\nu_k}, \ldots, P_3^{\nu_k})}{E_r(P_0^{\nu_k}, \ldots, P_3^{\nu_k})} = \frac{1}{r^2}$. Der Raum μ besitzt dann (per definitionem) in P_0 die Flächenkrümmung K, wenn mindestens eine P_0-Folge existiert und es für jede P_0-Folge $P_1^\nu, P_2^\nu, P_3^\nu$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein N derart gibt, daß für $\nu > N$ die Punkte $P_0, P_1^\nu, \ldots, P_3^\nu$ einem Quadrupel einer Kugel S_{r_ν} kongruent sind mit $\left|\frac{1}{r_\nu} - K\right| < \varepsilon$. Es wird gezeigt, daß ein metrischer Raum in einem Punkt höchstens eine Flächenkrümmung haben kann und daß für dreimal stetig differenzierbare Flächen des R die Flächenkrümmung in jedem Punkt existiert und gleich der Gaußschen Krümmung ist (man beachte, daß die Entfernungen $P_i^\nu P_j^\nu$ auf der Fläche zu messen sind).

H. Busemann (Kopenhagen).

Topologie:

Linke, Carola: Beiträge zur Topologie der dreidimensionalen polyedralen Gebilde verschiedener Metrik. Rostock: Diss. 1934. 38 S.

Whitehead, J. H. C.: On subdivisions of complexes. Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 69—75 (1935).

Die Arbeit handelt von einer Erweiterung eines Satzes von M. H. A. Newman [J. London Math. Soc. 2, 56—64 (1926)], wonach zwei äquivalente Mannigfaltigkeiten eine gemeinsame Unterteilung haben, auf äquivalente Komplexe allgemeiner Art.

H. Seifert (Dresden).

Nöbeling, Georg: Zur Topologie der Mannigfaltigkeiten. Erg. math. Kolloqu. H. 6, 46—47 (1935).

In dieser Note wird die vom Verf. gegebene und demnächst in den Monatsheften f. Math. u. Phys. erscheinende Lösung zweier Grundprobleme der modernen Topologie kurz skizziert. Es wird nämlich erstens die sog. Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie für den Fall der Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension bewiesen, zweitens das Problem der Triangulierbarkeit der topologischen (ebenfalls n-dimensionalen) geschlossenen und offenen Mannigfaltigkeiten gelöst. Durch die Lösung dieser Fragen wird zum erstenmal die Grundlage für den Aufbau einer vollständigen topologischen Theorie der Mannigfaltigkeiten gegeben.

Unverkürzte Beweisskizze. Der Schlüssel zu den beiden genannten Problemen [vgl. die Ausführungen von Alexander in Ber. Int. Math. Kongreß Zürich **1**, 253 (1932)] ist folgender Glättungssatz: Ist Φ eine topologische Abbildung der offenen Menge M des euklidischen R^n auf eine zweite offene Menge m des R^n, und ist auf M eine stetige positive Funktion $a(p)$ definiert, so existiert eine topologische Abbildung Δ von M auf m, so daß bei einer geeigneten Triangulierung von M jedes Simplex dieser Triangulierung affin abgebildet wird und für jeden Punkt p von M die Bilder $\Phi(p)$ und $\Delta(p)$ einen Abstand $< a(p)$ haben. Der Beweis dieses Glättungssatzes kann in drei Schritten geführt werden. Beim ersten wird

us der gegebenen Abbildung zunächst eine simpliziale (nicht notwendig topologische) Abbildung von M auf m hergeleitet, bei welcher jeder Punkt von m eine höchstens eindimensionale Urbildmenge und jeder Punkt jedes n-dimensionalen Simplexes einer gewissen Triangulierung von m genau einen Punkt zum Urbild hat. Der zweite und schwierigste Schritt leitet dann eine simpliziale Abbildung Γ von M auf m her, bei welcher jeder Punkt von m eine höchstens eindimensionale zusammenhängende Urbildmenge hat. Der dritte Schritt leitet dann aus Γ die gesuchte topologische simpliziale Abbildung Δ her. *P. Alexandroff* (Moskau).

Morrey jr., Charles B.: The topology of (path) surfaces. Amer. J. Math. **57**, 17—50 (1935).

This paper is devoted to a topological background for the theory of surfaces, the necessity of which has arisen in connection with the author's work on the analytic characterization of surfaces of finite area. Vector functions and vector notation are used throughout and the Fréchet notions of distance between surfaces, identity of two surfaces and convergence of sequences of surfaces play a prominent role in the paper. In the first section the author defines a large number of concepts and states and to some extent proves a considerable body of results which are fundamental for the sequel and which have to do with the structure of continuous curves, particularly relative to its cyclic elements. These concepts and results are for the most part already known and are to be found in the writings of R. L. Moore, H. Hahn, R. L. Wilder, C. Kuratowski, and the reviewer. In the next section the author defines a hemicactoid as a continuous curve consisting of a base set $\bar{B}$ and a null sequence of disjoint cactoids (in the sense of R. L. Moore) each joined on to $\bar{B}$ at a single point, where $\bar{B}$ is a plane continuous curve which does not separate the plane and hence has 2-cells for its true cyclic elements. Also a monotone transformation is defined as a continuous transformation $T(A) = B$ such that for each $b \in B$, $T^{-1}(b)$ is a continuum. Then, using upper semi-continuous collections as introduced and developed principally by R. L. Moore, the author proves, among other results, that any upper semi-continuous collection G of disjoint continua filling up a Jordan region $\bar{r}$ is topologically equivalent to a hemicactoid $\bar{H}$ in such a way that the associated monotone transformation carries into the base set $\bar{B}$ of $\bar{H}$ the collection G_0 of all elements g_0 of G which lie in no bounded complementary domain of any other element of G; and on the other hand, given any hemicactoid $\bar{H}$, a monotone vector function $U(u)$ can be found which carries $\bar{r}$ into $\bar{H}$ in such a way that the collection G_0 of the associated decomposition of $\bar{r}$ is carried into $\bar{B}$. Section 3 is devoted to monotone transformations of one plane set into another, and this is followed by a section on the representation of surfaces on hemicactoids. It is shown that if H is any hemicactoid and $X(U)$ is a continuous vector function defined over it, then there exists a monotone transformation $U(u)$ of a Jordan region $\bar{r}$ into H which carries the subcollection G_0 as above into the base set $\bar{B}$ of $\bar{H}$ and is such that if we define $x(u) = X[U(u)]$, then $x = x(u)$ is a surface and all surfaces obtained in this way are identical. Conversely, any surface $x = x(u)$, $u \in \bar{r}$, can be represented non-degenerately on some hemicactoid $\bar{H}$, i. e., we can write $x(u) = X[U(u)]$ where $U = U(u)$ is a monotone transformation of $\bar{r}$ into $\bar{H}$ as above and $X(U)$ is non-degenerate in the sense that it is not constant over any non-degenerate continuum in $\bar{H}$. In the final section, the so-called non-degenerate surfaces $x = x(u)$, $u \in \bar{r}$, are treated, i. e., surfaces which have a non-degenerate representation on a Jordan region. They are characterized by the properties (I) no continuum over which $x(u)$ is constant separates $\bar{r}$ and (II) $x(u)$ is not constant over the boundary or $\bar{r}$. It is further shown that any surface $x = x(u)$ which is monotone in the sense that its component functions are Lebesgue monotone and which is bounded in a certain way by a Jordan curve, is non-degenerate. *G. T. Whyburn* (Virginia).

Kampen, E. R. van: The topological transformations of a simple closed curve into itself. Amer. J. Math. 57, 142—152 (1935).

The properties of a topological, sense preserving transformation, T, of a simple closed curve, C, into itself, have been studied extensively since the early work of Poincaré. In this paper the more important of these results are given simple proofs. In addition, assuming irrational rotation number, conditions for transitivity (the transforms of a point of C are everywhere dense on C) are obtained; e. g., a nec. and suff. cond. that T be transitive is that the transforms p_n of any point p of C form an almost periodic function on the group of addition of all integers n. Results concerning the Fourier exponents and coefficients of this function appear. Finally, it is shown that the class of the function which transforms T into a pure rotation is dependent in a simple way on the class of the function $s = f(q, r)$, where this is defined as follows: O being the origin on C, if O_{a_ν} converges to q and O_{b_μ} converges to r, then $O_{a_\nu + b_\mu}$ converges to s.

G. A. Hedlund (Bryn Mawr).

Adkisson, V. W.: On extending a continuous (1-1) correspondence of continuous curves on a sphere. C. R. Soc. Sci. Varsovie 27, 5—9 (1934).

Notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein Homöomorphismus T von zwei stetigen sphärischen Kurven $M \subset S$, $M' \subset S'$ zu einem Homöomorphismus der beiden Sphären S und S' erweitert werden kann, besteht in der Erhaltung oder Umkehrung der Seiten eines beliebigen Bogens $\overline{ab} \subset M$ (bzw. $\overline{a'b'} \subset M'$). Die Seite des Bogens $\overline{ab}$ wird erhalten oder umgekehrt, falls zu einer $\overline{ab}$ enthaltenden einfachen geschlossenen Kurve $J \subset S$ eine solche $J' \subset S'$ existiert, daß das Bild einer Untermenge von M, die einem der beiden Komplementärgebiete von J angehört, in einem einzigen Komplementärgebiet von J' liegt. — Der Verf. zitiert Gehman [Amer. Trans. 28, 252—265 (1926)], der dieselbe Aufgabe für den Fall der ebenen Kurven in fast derselben Weise gelöst hat.

Julia Różańska (Moskau).

Flores: Über stetige Selbstabbildungen der S_n. Erg. math. Kolloqu. H. 6, 2—4 (1935).

Es werden die drei folgenden Eigenschaften der stetigen Abbildungen der S^n in sich bzw. in den R^n untersucht: I^n. Bei jeder stetigen Abbildung der S^n in den R^n gibt es in S^n ein diametrales Punktepaar, welches auf denselben Punkt des R^n abgebildet wird. II^n. Jede antipodentreue Abbildung der S^n in sich ist wesentlich. (Wegen dieser Sätze vgl. Borsuk, Fundam. Math. 20, 178; dies. Zbl. 6, 424.) III^n. Jede stetige Abbildung der S^n in sich, bei der die Bilder von je zwei diametralen Punkten verschieden sind, ist wesentlich. Es wird III^n aus II^n abgeleitet und auf die Ableitbarkeit von II^n aus I^{n+1} hingewiesen. Da offenbar I^{n+1} aus III^n folgt, wird somit der Beweis der Äquivalenz von I^{n+1}, II^n, III^n erbracht.

Alexandroff (Moskau).

Flores: Über n-dimensionale Komplexe, die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind. Erg. math. Kolloqu. H. 6, 4—7 (1935).

Es wird der Begriff eines im R^m absolut-selbstverschlungenen n-dimensionalen Komplexes eingeführt. Ein solcher Komplex kann nicht in den R^{m-1} topologisch eingebettet werden. Es werden Bedingungen für die absolute Selbstverschlungenheit eines Komplexes aufgestellt, aus denen folgt, daß man einen im R^{2n+1} selbstverschlungenen n-dimensionalen Komplex erhält, wenn man die Gesamtheit aller höchstens n-dimensionalen Seiten eines $(2n+2)$-dimensionalen Simplexes betrachtet. — Die Selbstverschlungenheit eines Komplexes wird definiert wie folgt. Ist $V(C, P)$ ein über dem Komplex C errichteter Kegel mit der Spitze P (d. h. die Verbindung [„join" von C und P), so heißt C absolut selbstverschlungen im R^m, falls für keine stetige Abbildung von $V(C, P)$ in den R^m, welche auf C topologisch ist, die Bildmengen von C und von $V(C, P) - C$ fremd sind. (Aus dieser Definition folgt ohne weiteres, daß ein Komplex $C \subset R^{m-1}$ im R^m nicht selbstverschlungen sein kann.) *Alexandroff.*

Alexandroff, Paul: On local properties of closed sets. Ann. of Math., II. s. **36**, 1—35 (1935).

The author begins by defining, for any closed and bounded set F in the Euclidean space R^n, local Betti numbers $q^s(a, R^n - F)$ and $p^r(a, F)$ of $R^n - F$ and of F respectively around a point a as follows. Denote by $U(a, \varepsilon)$ the ε-neighborhood of a in R^n. For any two positive numbers $\varepsilon, \sigma, \varepsilon > \sigma$, let $q^s_{\sigma,\varepsilon}$ be the maximal number of s-dimensional cycles in $U(a, \sigma) - F$ which are independent relative to homologies in $U(a, \varepsilon) - F$. Similarly, using relative cycles in the sense of Lefshetz, let $p^r_{\varepsilon,\sigma}$ be the number of r-dimensional cycles on $\overline{F \cdot U(a, \varepsilon)} \bmod [F - U(a, \varepsilon)]$ independent with respect to homologies in $\overline{F \cdot U(a, \varepsilon)} \bmod [F - U(a, \sigma)]$. Then $q^s(a, R^n - F) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lim\limits_{\sigma \to 0} q^s_{\sigma,\varepsilon}$ and $p^r(a, F) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lim\limits_{\sigma \to 0} p^r_{\varepsilon,\sigma}$. These are shown to exist, finite or infinite, and they are shown to obey the duality relationship $p^r(a, F) = q^{n-r-1}(a, R^n - F)$, for every $a \in F$. In the next section the property of local connectedness is subjected to a similar study and analogous results obtained. This is followed by a section devoted to the 1-dimensional case. Some lemmas are proven from which it is shown that the 1-dimensional continua having around each point finite or increasingly infinite Betti numbers are identical with the continuous curves which are locally acyclic (trees im kleinen) and that if $\mathrm{ind}_a K$ denotes the Menger-Urysohn index of such a curve at a, then $\mathrm{ind}_a K = p^1(a, K) + 1$. As consequences of this and other considerations, the author obtains a number of characterizations of the simple closed curve. The notion of regular accessibility is taken as the point of departure for a general theory of accessibility. Regular accessibility is characterized by a property suggesting the following definition, of which regular accessibility represents the case $s = 0$: a closed set $F \subset R^n$ is said to be s-accessible at $a \in F$ if for every $\varepsilon > 0$ there exists a $\sigma > 0$ such that any s-dimensional cycle on $U(a, \sigma) - F$ bounds on a closed subset of $U(a, \varepsilon) - (F - a)$. This is shown to be equivalent to an internal property of F, namely, that of having no r-dimensional condensation at a, where $r = n - s - 1$. Among the other interesting results proven is an invariance theorem to the effect that if $a \in F \subset R^n$ and $a' \in F' \subset R^{n'}$ correspond under a homeomorphism between F and F', then s-accessibility for F in a gives $(s + n' - n)$-accessibility for F' in a'. The Betti groups of a closed set F in and through a point a of F are next defined and studied. A relative cycle z on F is called a cycle through a if for some neighborhood U of a, z is a cycle mod $[F - U]$. Such a cycle z is said to be $\backsim 0$ in a provided that for some neighborhood V of a, z bounds mod $[F - V]$. The group of all such cycles through a which are not $\backsim 0$ in a is called the r-dimensional Betti group of F in a; and its rank, when the field of coefficients is the field R of all rational numbers, is called the r-dimensional Betti number $p^r_a(F)$ of F in a. Similarly, a cycle through a is said to be declinable from a if it can be transformed into a cycle bounding in a by the addition of an absolute cycle lying in an arbitrarily small neighborhood of a. The group of all cycles through a which are not declinable from a iş called the Betti group of F through a; and its rank, for the field of coefficients R, is called the r-dimensional Betti number $\bar{p}^r_a(F)$ of F through a. These groups, in general different, are shown to be identical for a given field of coefficients in case F is locally connected relative to this field and to this r. Also in case F has no r-dimensional condensation, we have $p^r(a, F) = p^r_a(F) = \bar{p}^r_a(F)$. Similar notions are defined for $R^n - F$, and the duality relation $p^{n-r-1}_a(R^n - F) = p^r_a(F)$ is shown to hold provided F has no r-dimensional condensation in a. The concluding sections of the paper are devoted to various applications and to a discussion of a variety of interesting unsloved problems. The applications are concerned principally with the theory of dimensionality. A new definition of a nuclear point a of F is given in terms of the Betti groups of F through a which has certain advantages over definitions previously given by the author and by Borsuk.

G. T. Whyburn (Virginia).

Kuratowski, Casimir: Sur le prolongement des fonctions continues et les transformations en polytopes. Fundam. Math. **24**, 259—268 (1935).

Es sei f eine stetige Abbildung einer im separablen metrischen Raume X gelegenen abgeschlossenen Menge F in einen separablen metrischen Raum Y. Es existiert dann ein separabler metrischer Oberraum $Z \supset Y$ und eine stetige Abbildung f' von X in Z mit den folgenden Eigenschaften: 1. f' stimmt auf F mit f überein; 2. Y ist in Z abgeschlossen; 3. die Punktmenge $Z - Y$ ist ein (abzählbar-unendliches jedoch lokalendliches) Polyeder, dessen Dimension die Dimension von $X - F$ nicht übertrifft. Diesen Satz beweist Verf. auf Grund eines spezielleren, jedoch in mancher Hinsicht schärferen Abbildungssatzes, welcher als eine Übertragung auf den Fall unendlicher Überdeckungen eines früheren [Fundam. Math. **20**, 191—198 (1933); dies. Zbl. **6**, 424] Resultates des Verf. anzusprechen ist. Dem Beweise geht folgender dimensionstheoretischer Überdeckungssatz des Verf. voran (der hierselbst auch bewiesen wird): Zu jeder n-dimensionalen offenen Menge G eines total-beschränkten metrischen Raumes R gibt es ein abzählbares System offener Teilmengen G_i von G mit folgenden Eigenschaften: 1. $G = \sum G_i = \sum \overline{G_i}$; 2. jedes G_i hat nur mit endlich-vielen G_j gemeinsame Punkte; 3. es gibt keinen Punkt, der mehr als zu $n+1$ Elementen des Systems G_i gehört; 4. es ist $\lim \delta(G_i) = 0$. Schließlich darf vorausgesetzt werden, daß die Durchmesser aller G_i kleiner als ein beliebig vorgeschriebenes $\varepsilon > 0$ sind. Die Arbeit enthält außerdem eine Reihe von Anwendungen und Spezialfällen der hier erwähnten Hauptsätze. *P. Alexandroff* (Moskau).

Kuratowski, Casimir: Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension n. Fundam. Math. **24**, 269—287 (1935).

Ein metrischer Raum Y heißt lokal zusammenhängend im Punkte p in der Dimension n, falls jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ entspricht, so daß jedes stetige Bild der n-dimensionalen Sphäre S_n, das in der η-Umgebung von p enthalten ist, in der ε-Umgebung von p stetig auf p zusammenziehbar ist (s. z. B. Lefschetz, Topology, S. 91). Damit ein separabler Raum Y in jedem Punkte lokal zusammenhängend in jeder Dimension $\leqq n$ sei, ist jede der beiden Bedingungen notwendig und hinreichend: 1. für jeden separablen Raum $Z \supset Y$, $\dim(Z - Y) \leqq n + 1$, in welchem Y abgeschlossen ist, existiert eine Umgebung U von Y in Z und eine stetige Abbildung f von U auf Y so, daß $f(x) = x$ für $x \in Y$; 2. zu jedem Punkte $p \in Y$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\eta > 0$, so daß, wenn A eine abgeschlossene Teilmenge eines separablen Raumes X ist, die der Bedingung $\dim(X - A) \leqq n + 1$ genügt, jede stetige Abbildung von A in die η-Umgebung des Punktes p zu einer stetigen Abbildung von X in die ε-Umgebung von p erweitert werden kann. Eine analoge Charakterisierung gibt Verf. auch für die in jeder Dimension $\leqq n$ Peanoschen separablen Räume, d. h. für diejenigen in jeder Dimension $\leqq n$ lokal zusammenhängenden Räume Y, bei denen jede stetige Abbildung von S_i $(0 \leqq i \leqq n)$ in Y stetig in Y auf einen Punkt zusammenziehbar ist. Zum Schluß werden Resultate angegeben, die es erlauben, auf den „Zusammenhang" der Summe $A + B$, des kartesischen Produktes $A \times B$ und des Raumes A^B der stetigen Abbildungen von B in A zu schließen. *Čech* (Brno).

Borsuk, Karol: Un théorème sur les groupes de Betti des ensembles localement connexes en toutes les dimensions $\leq n$. Fundam. Math. **24**, 311—316 (1935).

Jedem in jeder Dimension $\leqq n$ überall lokal zusammenziehbaren (vgl. vorst. Ref.) kompakten metrischen Raume R kann ein n-dimensionales Polyeder P so zugeordnet werden, daß sämtliche Bettischen Gruppen von R für die Dimensionen $\leqq n$ (mit einer willkürlichen abelschen Gruppe als Koeffizientenbereich) homomorphe Bilder der entsprechenden Bettischen Gruppen von P sind. *Čech* (Brno).

Borsuk, Karol: Quelques rétractes singuliers. Fundam. Math. **24**, 249—258 (1935).

Die Menge $A \subset E$ heißt ein Retrakt von E, wenn eine stetige Abbildung f von E auf A existiert mit $f(x) = x$ für jeden Punkt x von A. Die kompakte Menge A heißt ein absoluter Retrakt (bzw. absoluter Umgebungsretrakt), wenn für jeden metrischen

Raum $M \supset A$ die Menge A ein Retrakt von M (bzw. ein Retrakt einer geeigneten Umgebung von A in M) ist. Ein kompakter Raum E heißt eine homotope Membran (bzw. homologe Membran) der Dimension m für seine abgeschlossene Teilmenge A, wenn jede abgeschlossene höchstens m-dimensionale Teilmenge von A in E stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann (bzw. jeder m-dimensionale wahre Zykel von A in E berandet; vgl. hierzu Alexandroff, Math. Ann. **106**, 178; dies. Zbl. **4**, 73). E heißt kurz homotope bzw. homologe Membran für A, wenn E es für jede Dimension ist. Verf. konstruiert nun für je zwei natürliche Zahlen m und n mit $2 \leqq m < n$ zwei interessante Beispiele: Das erste ist ein (im Sinne von Menger-Urysohn) n-dimensionaler absoluter Retrakt, welcher eine irreduzible homologe Membran für eine zur $(m-1)$-dimensionalen Sphäre $x_1^2 + \cdots + x_m^2 = 1$ des euklidischen E_m homöomorphe Teilmenge ist. Das zweite Beispiel ist ein n-dimensionaler absoluter Umgebungsretrakt, dessen Bettische Zahlen (vgl. Lefschetz, Topology, S. 323—334. 1930) die der m-dimensionalen Sphäre sind und die eine homotope Membran ist für jede echte abgeschlossene Teilmenge. *Nöbeling* (Erlangen).

Hurewicz, W.: Sur la dimension des produits Cartésiens. Ann. of Math., II. s. **36**, 194—197 (1935).

Folgender Satz wird bewiesen: Ist X ein kompakter und Y ein separabler mindestens eindimensionaler metrisierbarer Raum, so gilt für das topologische (= kartesische) Produkt $X \times Y$ die Ungleichung $\dim(X \times Y) > \dim X$. *P. Alexandroff.*

Putnam, R. G.: Über Endpunkte höheren Geschlechtes. Erg. math. Kolloqu. H. **6**, 8—10 (1935).

Es sei R ein metrischer Raum und p ein Punkt von R. Besitzt p nicht beliebig kleine Umgebungen mit leeren, wohl aber solche mit genau einpunktigen Begrenzungen, so heißt p ein Endpunkt. Liegt p nicht in beliebig kleinen Umgebungen, deren Begrenzungen endlich viele Punkte enthalten, wohl aber in solchen, deren Begrenzungen genau einen Häufungspunkt haben, so heißt p ein Endpunkt vom Geschlecht 2. Verf. beweist die Mengersche Vermutung, daß die Menge aller Endpunkte und aller Endpunkte vom Geschlecht 2 nulldimensional ist. *Nöbeling* (Erlangen).

Relativitätstheorie.

Levi-Civita, T.: Perfezionamento della regola di equivalenza fra moti einsteiniani e moti newtoniani. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **20**, 398—403 (1934).

According to the author's well known theorem of mechanical equivalence (see, e. g., his Absolute Differential Calculus 1927, 394—396) the trajectories of free particles in a statical space-time of Newtonian potential U are, to a second approximation, those of an ordinary Newtonian motion in a classical field of potential $U_1 \equiv (1 + 4E/c^2)U + 3U^2/c^2$, where the constant E denotes the total energy of the system. The time t_1 in the auxiliary Newtonian problem is connected with the coordinate-time t of the Einsteinian problem by the relation $dt = dt_1(1 + 4U/c^2)$. In the present paper the author obtains a more direct equivalence between the Einsteinian and Newtonian motions. Instead of requiring E to be constant in the relativistic problem he assumes it to be variable, and supposes that the same initial conditions are satisfied in the two problems. He then shows that, to the degree of approximation considered, E may in fact be taken as constant, and so arrives at the same auxiliary potential U_1 as before. He thus re-establishes his theorem of equivalence with one important difference: in the new theorem the relativistic time-variable t is identified with the absolute time t_1 of the corresponding Newtonian problem. *H. S. Ruse.*

McCrea, W. H.: Observable relations in relativistic cosmology. Z. Astrophys. **9**, 290—314 (1935).

Die Arbeit geht den (wenigstens prinzipiell) der Beobachtung zugänglichen Beziehungen in der relativistischen Theorie der sich ausdehnenden Welt nach, mit dem

Ziele, dadurch die einmal nötig werdende Entscheidung der Beobachtung über die verschiedenen theoretischen Bilder vorzubereiten. [Ähnliche Ziele verfolgt die Arbeit von de Sitter, Bull. Astron. Inst. Netherlands **7**, 205—216 (1934); dies. Zbl. **9**, 334; vgl. auch Tolman, Relativity Thermodynamics and Cosmology, S. 462ff.] Inhalt: Einleitung, Metrik der sich ausdehnenden Welt, Lichtstrahlen, Doppler-Verschiebung, Räumliche Entfernung, Parallaxe, Neue Definition, Leuchtkraft, Spektrale Energieverteilung, Beziehung zwischen verschiedenen „Distanzen", Leuchtkraft und Doppler-Effekt, Anzahl der Nebel, Milnes hydrodynamisches Modell, Einstein- de Sittersches Modell, Newtonsches Weltall, Schlußdiskussion. *Heckmann* (Göttingen).

Ertel, Hans: Einsteins kosmologische Konstante und der Zusammenhang von Atom- und kosmischen Konstanten im expandierenden Universum. S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1935**, 3—7.

This paper contains a variety of formulae connecting the fundamental constants of quantum mechanics and cosmology, deduced from earlier work of the author (this Zbl. **10**, 324). So, for example, $\pm\sqrt{\lambda} = \frac{f m_+^2\, m c}{\pi h e^2}$, where λ is the cosmological constant, f is the Newtonian constant of gravitation, m_+ and m are the masses of a proton and an electron, and c, h, e have their usual meanings. *H. S. Ruse* (Edinburgh).

Gormley, P. G.: On Straneo's unified theory of gravitation and electricity. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. **3**, 269—275 (1933).

This paper is concerned with the unified theory of gravitation and electricity proposed by P. Straneo (see this Zbl. **2**, 91, 300; **3**, 181; **4**, 232, 378, 424; **5**, 271). The author shows that the field-equations proposed by Straneo have only three distinct solutions, one being the Galilean world, and one the Einstein cylindrical world, while the other is not any well-known space-time. He infers that Straneo's field equations cannot be the correct equations for a general electromagnetic field. *Whittaker.*

Donder, Th. de: La gravifique tourbillonnaire. I. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **20**, 986—990 (1934).

Außer dem symmetrischen metrischen Tensor $g_{\alpha\beta}$ wird die Existenz eines antisymmetrischen Tensors $\overset{a}{g}_{\alpha\beta}$ vorausgesetzt. Der üblichen phänomenologischen Weltfunktion, die mit den symmetrischen $g_{\alpha\beta}$ gebildet ist, wird eine zweite phänomenologische Weltfunktion zur Seite gestellt, die in analoger Struktur aus den antisymmetrischen $\overset{a}{g}_{\alpha\beta}$ aufgebaut ist. Die Variation der ersten Weltfunktion nach den $g_{\alpha\beta}$, der zweiten Weltfunktion nach den $\overset{a}{g}_{\alpha\beta}$ gibt die vereinigten Gleichungen von Gravitation und Elektrizität. *Lanczos* (Lafayette).

Quantentheorie.

Born, Max, and Erwin Schrödinger: The absolute field constant in the new field theory. Nature **135**, 342 (1935).

Berechnet man den Radius r' des Elektrons aus der Energie ($= mc^2$) des vom Spinmoment μ erzeugten magnetischen Feldes, so bekommt man mit

$$\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{r'^3} = mc^2; \quad \mu = \frac{e}{2}\cdot\frac{e^2}{mc^2}\cdot\frac{hc}{2\pi e^2} = \frac{e r_0}{2\alpha}$$

einen Wert r', der etwa um einen Faktor 13 größer ist als der elektrostatisch (ohne Rücksicht auf μ) berechnete Radius $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$. Es wird besprochen, in welcher Weise die Berücksichtigung von r' statt r_0 den Wert der in der Bornschen Elektrodynamik auftretenden „Absolutfeldkonstante" beeinflußt. — Dem Ref. scheint eine Identifizierung des Elektronenradius mit r_0 korrespondenzmäßig folgerichtiger als mit r', weil bereits die Existenz des Momentes μ als ein charakteristischer Quanteneffekt anzusehen ist. Natürlich gibt r' zweifellos eine untere Grenze für die Abstände vom Elektron, in welchen ein aus einem Dipolmoment μ klassisch zu berechnendes Feld

noch existieren kann. Es dürfte aber unabhängig von r' die Gültigkeit des Coulombgesetzes für die elektrische Feldstärke bis an r_0 heran bestehen bleiben.

P. Jordan (Rostock).

Nikolskij, K.: Über die Beziehung zwischen den Born-Infeldschen Feldgleichungen und der Diracschen Quantengleichung. C. R. Acad. Sci. URSS **1**, 210—212 u. dtsch. Text 212—213 (1935) [Russisch].

Es wird eine merkwürdige Analogiebeziehung zwischen der Diracgleichung und der Bornschen nichtlinearen Elektrodynamik gezeigt. Die Diracsche Gleichung kann abgeleitet werden aus einem Variationsproblem

$$\delta \int \{T_k^k - mc^2 \cdot (\psi, \alpha \psi)\} d\omega = 0, \tag{1}$$

wo T_k^l der Energietensor ist; und die Invariante $(\psi, \alpha \psi)$ steht mit dem aus ψ bilinear herstellbaren Sechservektor $f_{kl} = (\psi, \alpha_k \alpha_l \alpha \psi)$ in einer Beziehung

$$(\psi, \alpha \psi) = \sqrt{k_0^2 + \tfrac{1}{2} f_{kl} f^{kl}}.$$

Also kann man (1) umschreiben in

$$\delta \int \{T_k^k - mc^2 \sqrt{k_0^2 + \tfrac{1}{2} f_{kl} f^{kl}}\} d\omega = 0, \tag{2}$$

und das ist ganz ähnlich dem Bornschen Variationsprinzip für die F_{kl} statt f_{kl}.

P. Jordan (Rostock).

Bethe, H., and R. Peierls: Quantum theory of the diplon. Proc. Roy. Soc. London A **148**, 146—156 (1935).

Unter Benutzung einer von Majorana vorgeschlagenen Gleichung für die Wechselwirkung von Protonen und Neutronen wird gezeigt, wie man ohne andere Kenntnis als den Massendefekt im Normalzustand verschiedene Eigenschaften des schweren Wasserstoffkerns wie die Absorption und Streuung von γ-Strahlen, den Zerfall durch Elektronenstöße sowie die Bindung von Neutronen an Protonen mit ziemlicher Genauigkeit abschätzen kann. *O. Klein* (Stockholm).

Plato, Günther: Wellenmechanische Berechnung einiger Atomeigenschaften. Ann. Physik, V. F. **21**, 745—760 (1935).

Angenäherte Eigenfunktionen werden für einige Atome (Ne, A und entspr. Ionen) nach dem Variationsprinzip berechnet. Die erhaltenen Eigenwerte stimmen einigermaßen mit den beobachteten Ionisierungsspannungen überein. Die diamagnetische Suszeptibilität wird berechnet, ebenso Röntgenlinien und Atomformfaktoren für Röntgenstreuung. *Bethe* (Ithaca, N. Y.).

Breit, G., and John A. Wheeler: Collision of two light quanta. Physic. Rev., II. s. **46**, 1087—1091 (1934).

Die Wahrscheinlichkeit der Erzeugung eines Elektronenpaares (positiv und negativ) durch zwei Lichtquanten wird berechnet. Die Wahrscheinlichkeit ist zu klein, um den Prozeß beobachtbar zu machen. Die Beziehung zum inversen Prozeß (Annihilationsstrahlung) wird diskutiert. *H. Bethe* (Ithaca, N. Y.).

Oppenheimer, J. R.: Note on charge and field fluctuations. Physic. Rev., II. s. **47**, 144—145 (1935).

Die von Heisenberg [Verh. d. Sächs. Akad. **86**, 317 (1934); dies. Zbl. **10**, 90] berechneten Ladungsschwankungen werden auf die entsprechenden an die Messung der Ladung geknüpften Feldschwankungen zurückgeführt, die ihrerseits der Bildung einer unbestimmten Anzahl von Elektronenpaaren entsprechen. *Klein* (Stockholm).

Oppenheimer, J. R.: Note on the production of pairs by charged particles. Physic. Rev., II. s. **47**, 146—147 (1935).

Es wird eine einfache Abschätzung der Wahrscheinlichkeit von Elektronenpaarbildung bei Zusammenstößen von zwei Kernen bzw. von einem Kern mit einem Elektron mit Hilfe der bekannten Ausdrücke für die bei solchen Stößen emittierte Strahlung gegeben. *O. Klein* (Stockholm).

Klassische Optik.

Boegehold, H., und M. Herzberger: Kann man zwei verschiedene Flächen durch dieselbe Folge von Umdrehungsflächen scharf abbilden? Compositio Math. **1**, 448—476 (1935).

Die Untersuchungen beschränken sich auf rotationssymmetrische Systeme. Die Verff. leiten zunächst einige Sätze ab, die bei der scharfen Abbildung zweier verschiedener Flächen durch dasselbe rotationssymmetrische System erfüllt sein müssen. Es kann unmöglich eine der beiden Ding- oder Bildflächen allein im Unendlichen liegen. Liegen beide Ding- (und Bild-) Flächen im Endlichen, so ist der sagittale Abbildungsmaßstab (β_1' und β_2') für jede der beiden Flächen eine Konstante, und zwar gleich der Gaußschen Vergrößerung im Flächenscheitel, wobei noch die Beziehung besteht: $n'^2\beta_1'\beta_2' = n^2$. Werden in einem brennpunktlosen System zwei im Endlichen gelegene Flächen scharf abgebildet, so ist das System ein Knotenpunktsystem, das den ganzen Raum scharf abbildet. (Knotenpunktsystem: jeder Bildstrahl ist zu einem Dingstrahl — bis auf eine etwaige Spiegelung — parallel.) In nicht-brennpunktlosen Systemen: Jede der beiden (endlichen) Bildflächen entsteht aus der zugehörigen Dingfläche durch eine Dehnung im konstanten Verhältnis π in Richtung der Achse und eine Dehnung im konstanten Verhältnis β' senkrecht dazu. Beide Ding- und Bildflächen sind rotationssymmetrische Flächen zweiter Ordnung. Die zweite B-Fläche ist der ersten D-Fläche, die erste B-Fläche der zweiten D-Fläche im Maßstab $n : n'$ ähnlich. Beide Ding- und beide Bildflächen haben denselben Mittelpunkt. Die Krümmung der zweiten (ersten) Bildfläche ist der der ersten (zweiten) Dingfläche entgegengesetzt gerichtet. In einem Nichtknotenpunktsystem können nicht zwei durch denselben Punkt der Achse gehende getrennte Flächen scharf abgebildet werden. Es folgen Sätze für den Fall, daß die unendlich ferne Ebene auf sich selbst abgebildet wird, sowie für den Fall, daß die erste D-Fläche und die zweite B-Fläche im Unendlichen liegen. Aus Eikonalbeziehungen folgt weiter: Werden zwei (endliche) Flächen scharf abgebildet, so hat der Lichtweg zwischen erster D-Fläche und erster B-Fläche auf allen Strahlen konstanten Wert und ist numerisch gleich dem Lichtweg zwischen einem beliebigen D-Punkt der zweiten Fläche und seinem B-Punkt. Die Verff. stellen die Eikonale für die betrachteten Abbildungen auf, wodurch ihre optische Möglichkeit erwiesen ist. Es folgen Bemerkungen über die Unmöglichkeit der gleichzeitigen scharfen Abbildung von drei Flächen. *Picht* (Berlin).

Kudar, Hans: Physikalische Grundlagen der Plastik von Hohlspiegelbildern. Z. Physik **93**, 473—476 (1935).

Verf. gibt den Versuch einer Erklärung für die Tatsache, daß virtuelle Bilder bei Hohlspiegel oder Lupe plastisch erscheinen. Die übliche Erklärung mit Hilfe des Veranteffekts wird abgelehnt, da die Plastik des Hohlspiegels auch der Betrachtung bei exakter Perspektive überlegen ist; eine perspektivische Erklärung reiche also nicht aus. — Verf. benutzt zur Erklärung eine von ihm als radiale Dilatation der virtuellen Bildfläche bezeichnete Erscheinung. Leider hat der Ref. aus der Arbeit nicht entnehmen können, welchen geometrisch-optischen Tatbestand Verf. mit diesem Namen belegt, da er ihn deutlich von der etwa wahrzunehmenden Verzerrung als etwas, „was nicht unmittelbar wahrgenommen werden kann" unterscheidet. Eine angekündigte weitere Veröffentlichung dürfte hoffentlich hierüber mehr sagen. *Herzberger* (Rochester).

Constantinesco, G. G.: La réfraction astronomique. Bull. sci. École polytechn. Timişoara **5**, 213—224 (1934).

Der Verf. leitet zunächst die Differentialgleichung für die astronomische Refraktion ab, er gibt ihr mehrere Formen, wie sie sich schon bei P. Bouguer, L. Euler, J. H. Lambert finden (vgl. C. Bruhns, Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung. Leipzig 1861). — Die Gleichung ist nicht allgemein zu integrieren, da man kein allgemeines Gesetz für die Änderung des Brechungsverhältnisses mit der Höhe angeben kann. Constantinesco macht eine Annahme, mit deren Hilfe er die Aufgaben mathematisch lösen kann, das Ergebnis sieht so aus:

$$\left(\frac{n_0}{n}\right)^{\frac{2}{\mu}} = \frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{n_0 r_0}{n r}\right)^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{n_0 r_0}{n r}\right)^2}} e^{2\sqrt{1-\left(\frac{n_0 r_0}{n r}\right)^2}}; \quad \varrho = \frac{\varrho_0}{\lambda - 1}\int_1^{\lambda} \frac{(1-y^2)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(\operatorname{ctg}^2 z_0 + 1 - y^2)}};$$

(der erste Exponent ist bei C. $-\frac{2}{\mu}$, wohl ein Druckfehler). Hier ist $\mu = \frac{\varrho_0}{\lambda - 1}$, $\lambda = \frac{n_0 r_0}{n_1 r_1}$. ϱ_0 ist die Horizontalrefraktion, ϱ die gesuchte Refraktion für die Zenitdistanz z_0, n_0 das Brechungsverhältnis an der Erdoberfläche, r_0 der Erdradius, n_1 das Brechungsverhältnis des leeren Raumes, r_1 der Abstand der Grenze der Lufthülle vom Erdmittelpunkt, n das Brechungsverhältnis für eine beliebige Schicht der Lufthülle im Abstande r vom Erdmittelpunkt. ϱ ist ein elliptisches Integral. *Hans Boegehold.*

Brüche, E.: Die Grundlagen der angewandten geometrischen Elektronenoptik. Arch. Elektrotechn. 29, 79—107 (1935).

In der vorliegenden Arbeit gibt der Verf. einen zusammenfassenden Überblick über die geometrische Elektronenoptik und ihre Anwendung in der Braunschen Röhre und im Elektronenmikroskop. In Anlehnung an die Arbeiten von Busch, Bethe, Picht, Henneberg u. a. wird kurz die Theorie der magnetischen Linse, des Brechungsgesetzes, der elektrischen Elektronenlinse, der sog. „Fokussierungslinse" und des „Ablenkelementes" (Prismas) gebracht. In den Abschnitten über die Anwendung der Elektronenoptik auf die Braunsche Röhre werden die von Johannson, Brüche und Scherzer vorgeschlagenen Immersionslinsen und -objektive behandelt. Es folgt die Besprechung des magnetischen (Knoll, Houtermans, Schulze-Ruska-Pohl) und des elektrischen (Brüche-Johannson) Elektronenmikroskops. *Picht* (Berlin).

Bouwers, A.: The focussing of narrow electron-beams in vacuo. Physica 2, 145 bis 154 (1935).

Der Querschnitt eines (engen) Elektronenstrahlenbündels, das sich im Vakuum ausbreitet, wird beeinflußt: 1. von der (abstoßenden) Kraft, mit der die Elektronen gegenseitig aufeinander wirken (Raumladungseffekt), 2. von dem Magnetfeld, das durch die bewegte elektrische Ladung bedingt ist, 3. von evtl. vorhandenen inhomogenen elektrischen und magnetischen Feldern. Der Verf. untersucht zunächst den Einfluß der Kräfte 1 und 2, von denen die erste querschnittverbreiternd, die zweite querschnittverringernd wirkt. Für die nach außen gerichtete Beschleunigung der Kraft 1 gilt die Formel: $\ddot{s} = 2\pi i e c^2/m v$, worin $i = \varrho v$ die elektrische Stromdichte ist und die elektromagnetischen Einheiten benutzt sind. Entsprechend ergibt sich für die Kraft 2: $\ddot{s} = -2\pi i e v/m$, also $\ddot{s}_2 = -\beta^2 \ddot{s}_1 \ll \ddot{s}_1$, wenn $v \ll c$. (Die Formeln gelten für die „Randstrahlen" eines bandförmigen — also zweidimensionalen — Strahlenbündels.) — Anschließend betrachtet der Verf. den Einfluß eines inhomogenen elektrischen Feldes auf ein bandförmiges Elektronenstrahlenbündel der Breite h, das auf einer Strecke l eine Spannungsdifferenz $E_2 - E_1$ durchläuft. Für die nach innen gerichtete Beschleunigung ergibt sich: $\ddot{s} = he(E_2 - E_1)/2ml$. Hieraus ergibt sich $f = 2\Phi/(E_2 - E_1)$. Unter Benutzung der Gleichung $\frac{1}{f} = \sum_1^n \frac{1}{f_n}$ leitet der Verf. dann für ein inhomogenes Feld zwischen den Punkten x_1 und x_2 auf der Achse die Formel

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\Phi''}{\Phi}\,dx \quad \text{mit} \quad \Phi = \Phi(x)$$

ab, die sich von der bekannten Brennweitenformel (Picht, Scherzer-Johannson u.a.) wesentlich unterscheidet. Der Verf. wendet seine Formel auf die „Einzellinse" (Brüche-Johannson) an und findet mit den experimentell ermittelten Werten gute (bzw. „bessere") Übereinstimmung. Er gibt außerdem noch eine andere Näherungsformel für die Brennweite eines inhomogenen elektrischen Feldes und kombiniert

zum Schluß die Ergebnisse des inhomogenen elektrischen Feldes mit den zu Anfang der Arbeit abgeleiteten Werten der Kraft 1 und 2 (s. o.). Die gegenseitige Abstoßung der Elektronen bewirkt eine Verlagerung des Brennpunktes in Richtung der Fortpflanzung der Elektronen. Es wird eine Bedingungsungleichung angegeben, die erfüllt sein muß, damit ein Konvergenzpunkt der Elektronen tatsächlich zustande kommt. Ist sie nicht erfüllt, so nimmt der Querschnitt des Elektronenstrahlbündels zwar zunächst ab, aber nur bis zu einer endlichen Größe, um dann wieder zuzunehmen.

Picht (Berlin).

Henneberg, Walter: Das Potential von Schlitzblende und Lochblende. Z. Physik 94, 22—27 (1935).

Der Verf. gibt unter Hinweis auf eine Arbeit von A. Glaser und W. Henneberg, die später in der Z. techn. Physik erscheinen soll, die analytische Darstellung des Potentialverlaufes einer Schlitzblende (zweidimensionales Problem) und einer Lochblende (dreidimensional). Anschließend gibt er nach diesen Formeln berechnete graphische Darstellungen dieser Potentialfelder sowie des Potentialverlaufes in der Achse und im Schnitt der Blendenebene mit einer durch die Achse gelegten Ebene. Die graphischen Darstellungen beziehen sich auf die beiden Fälle, daß 1. auf der einen Seite der Blende ein feldfreier Raum ist bzw. 2. auf beiden Seiten entgegengesetzt gleiche Felder herrschen.

Picht (Berlin).

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Miller, J. C. P.: On a special case in the determination of probable errors. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **94**, 860—866 (1934).

Bei der Ermittlung der täglichen durch den Mond hervorgerufenen Änderungen geophysikalischer Größen (z. B. Barometerdruck, magnetisches Feld) ist es zweckdienlich, zuerst die täglichen durch die Sonne hervorgerufenen harmonischen Komponenten der Änderungen in Tagesgruppen zusammenzufassen, indem jede Gruppe einer bestimmten Mondphase entspricht. Die sich so ergebenden Werte der Amplitude und der Phase jeder Komponente können durch Vektoren dargestellt werden. Diese Komponenten enthalten einen von der Sonne herrührenden Teil, den Verf. in allen Gruppen als konstant mit Bezug auf Amplitude und Phase annimmt und dem Mittelwert der Ergebnisse aus allen Gruppen gleichsetzt. Neben diesem Hauptteil enthalten die Ergebnisse im wesentlichen den von dem Monde herrührenden Anteil neben anderen Bestandteilen zufälligen Charakters. Sind Amplitude und Phase des Mondanteils bestimmt, so bleibt die Bestimmung der Größe des als zufällig anzusehenden Teiles die Hauptaufgabe, und diese Größe liefert zugleich den wahrscheinlichen Fehler der durch den Mond erzeugten täglichen Änderung der in Frage stehenden geophysikalischen Größe. Verf. gibt für diese Aufgabe eine einfache mathematische Lösung.

Schmehl (Potsdam).

Döbritzsch, Heinrich: Die Verknüpfung von Dreiecknetzen. Bonn: Diss. 1933. 24 S.

Numerov, B.: On the problem of the determination of the geoid on the basis of gravity observations. C. R. Acad. Sci. URSS **1**, 17—25 u. engl. Text 21—25 (1935) [Russisch].

Es wird der Vorschlag Brillouins, die beobachteten Schwerewerte auf eine äußere Niveaufläche zu reduzieren, aufgegriffen, jedoch in zweifacher Hinsicht abgeändert, um das Resultat nicht durch die Unsicherheit der Reduktion illusorisch zu machen. Die eine Änderung betrifft die Höhe der gewählten Niveaufläche; sie wird im Hinblick auf die ausgedehnten Ebenen Rußlands auf etwa 500 m beschränkt. Die zweite Änderung beinhaltet eine Verfeinerung der Freiluftformel: die vertikale Ableitung der Schwerkraft wird aus den Schwerestörungen im Anschluß an eine frühere Untersuchung der Verf. [B. Numerov, Interrelation between local gravity anomalies and the derivatives of the potential. Z. Geophys. 5, 58—62 (1929)] entwickelt.

K. Ledersteger (Wien).

Ledersteger, K.: Über die Minimumseigenschaft der Schwerestörungen. Z. Geophys. **11**, 23—29 (1935).

Aus Ackerls Entwicklung des Schwerefeldes der Erde nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung folgt für das Brunssche Niveausphäroid ein Abplattungswert von 1/277 gegenüber einem von 1/297 nach dem Clairautschen Theorem. Die Ursache für die Abweichung ist nach dem Verf. darin zu suchen, daß nach der physikalischen Theorie Hopfners die Koeffizienten der Clairautschen Formel direkt aus der 0. und 2. Kugelfunktion der Ackerlschen Entwicklung folgt. Bei der älteren Methode werden die gegebenen Schwerewerte nach vermittelnden Beobachtungen ausgeglichen. Die Schwerestörung $(g - \gamma)$ ist durch die Minimumsbedingung definiert. Bei hinreichend dicht und streng symmetrisch verteilten Beobachtungen ergeben beide Methoden die theoretische Schwerkraft am Brunsschen Niveausphäroid, und eben an dieser mangelt es, da die Kulturländer mit zahlreichen Beobachtungen vertreten sind, wohingegen die anderen Gebiete, besonders die Meere, nur wenig zu berücksichtigen sind.

Brockamp (Kopenhagen).

Grabowski, L.: Bemerkungen zum Artikel von Herrn H. Ertel „Die Berechnung der Polfluchtkraft". Gerlands Beitr. Geophys. **43**, 346—350 (1935).

Der Verf. versucht, Ertel durch den Nachweis eines in der zitierten Abhandlung [Gerlands Beitr. Geophys. **43**, 327—330 (1934); dies. Zbl. **10**, 287] angeblich unterlaufenen Fehlers zu widerlegen. *Hopfner* (Wien).

Benioff, Hugo: The physical evaluation of seismic destructiveness. Bull. Seismol. Soc. Amer. **24**, 398—403 (1934).

For the evaluation of the destructiveness of earthquakes towards engineering structures, the author proposes to set up a series of undamped pendulum seismometers, having frequencies distributed throughout the range of engineering significance. The recorded maximum deflections imparted to these pendulums by the earthquake are plotted as a function, $Y(\nu_0)$, of the natural frequencies of the pendulums. This "pendular spectrum" characterizes the earthquake, and the value of its integral over all significant frequencies, ν_0, is defined as the "seismic destructiveness" of the quake. This response spectrum has direct application to design, and possesses the "great advantage that the true ground displacement (or its derivatives) does not have to be measured or calculated". *L. B. Slichter* (Cambridge, Mass.).

Schmidt, Oswald v.: Über die Totalreflexion in der Akustik und Optik. (Auf Grund experimenteller Ergebnisse der Sprengseismik.) Ann. Physik, V. F. **19**, 891 bis 912 (1934).

If we construct the travel time curve of the first shock of an explosion of dynamite at the surface of the earth's crust, which is composed of two layers, the velocity v_1 of disturbance in the above layer being smaller than that v_2 in the below one, we observe at least for few kilometers from the point of explosion that it is composed of two portions, each of which is a straight line. The first portion corresponds to the velocity v_1 and the second to the velocity v_2. This phenomenon can only be explained by considering that even for larger angles than that of total reflection the energy comparable with that of incident disturbance can be transmitted through the boundary layer of the second medium of velocity v_2 and then comes out to the surface. The author names this phenomenon as wandering reflection (wandernde Reflexion). He explaines by simple geometrical considerations that in case of plane and spherical waves large amount of energy can be transmitted through the boundary layer, if we assume that the disturbance travels in this layer for larger angles than that of total reflection. We cannot exactly say at what angle the wandering reflection begins. — Some facts in optics such as the existence of light in the second medium in case of total reflection and the self-contradiction in the Fresnel's formulae for the angle of total reflection can be explained by the idea of wandering reflection. In optics the wave lengths are so short that the effect of wandering reflection cannot clearly be observed as in seismometry. — He also has

the opinion that the fact that the signals of wireless telegraphy travel many times around the earth can be explained by the idea of wandering reflection. *Kodaira.*°°

Sokolov, P. T.: Zur Theorie der seismischen Methode. Beitr. angew. Geophys. **5,** 1—19 (1935).

Das Laufzeitkurvenverfahren der experimentellen Seismik erlaubt Geschwindigkeit und Tiefenlage elastisch verschiedenartiger Schichten aus ersten Einsätzen festzustellen, sofern die Geschwindigkeit von Schicht zu Schicht nach unten hin zunimmt und außerdem die Mächtigkeit von Schicht 1, 2, . . . einen Grenzwert nicht unterschreitet. In diesem Falle tritt für jede Schicht eine Laufzeitkurve aus ersten Einsätzen auf. Die zugehörigen Schichten haben die Abscissen r_{12} und r_{23}. Für $r_{12} = r_{23}$ — Schicht 2 tritt in ersten Einsätzen nicht mehr in Erscheinung — ist die kritische Mächtigkeit $\overline{H}_2$ bei horizontaler Lagerung gegeben durch

$$\overline{H}_2 = H_1 \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma \sin\alpha} \frac{1-\sin\beta}{1-\sin\alpha} - H_1 \frac{\cos\beta}{\cos\gamma \sin\alpha},$$

wo $\sin\alpha = v_1/v_2$; $\sin\beta = v_1/v_3$; $\sin\gamma = v_1/v_3$ ist. — Für verschiedene v_2, v_3 werden für $v_1 = 1000$ m/sec und $H_1 = 100$ m bei paralleler und geneigter Lagerung ($\sphericalangle \varphi$) die Kurven für $H = f(v_3)$ resp. $H = f(\varphi)$ gegeben. — Des weiteren wird für n Schichten ($v_n < v_{n+1}$) für die Reflexion Rn brauchbare Näherungsformeln gegeben, wobei die Untersuchung auf Abstände $rn < Hn$ beschränkt wird. Ausgehend von

$$t_n = 2\left(\frac{\sqrt{H_1^2 + d_1^2}}{v_1} + \cdots \frac{\sqrt{H_n^2 + d_n^2}}{v_n}\right)$$

wird für $d_1 < H_1$, $\frac{dn}{Hn} \ll 1$ und kleinen Einfallwinkel i, $t_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2H_i}{v_i} + \frac{r^2}{4} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} v_k H_k}$, woraus V_n und H_n abzuleiten ist.

Brockamp (Kopenhagen).

Kobeleva, O. M.: Sur la théorie mathématique du séismographe. J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine **1,** Fasc. 3, 65—70 (1934) [Ukrainisch].

Es wird untersucht, in welchem Fall die Galvanometerablesungen eines Horizontalpendels die größte Genauigkeit besitzen. Die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels ist $\theta'' + 2\varepsilon\theta' + \eta^2\theta + x''/l = 0$ und diejenige des Galvanometerzeigers $\varphi'' + 2\varepsilon_1\varphi' + \eta_1^2\varphi + \varkappa\theta' = 0$, wo die beiden ε die Dämpfung der Systeme darstellen und die η mit den Perioden verbunden sind. $\varkappa$ ist ein Faktor, welcher die Empfindlichkeit des Galvanometers charakterisiert. Die beiden Differentialgleichungen lassen sich auf eine lineare Gleichung 4. Ordnung zurückführen, aus der die Bedingung abgeleitet wird:

$$\left|y - \frac{f(t)}{Dz}\right| < \sqrt{\left(\frac{C^2}{\omega^6} + \frac{2B}{\omega^2}\right)} 2\pi Y_{\max},$$

welche die Empfindlichkeit der Aufzeichnung ergibt. Hier bedeutet $B = \eta^2 + \eta_1^2 + 4\varepsilon\varepsilon_1$, $C = 2(\varepsilon\eta_1^2 + \varepsilon_1\eta^2)$, $D = \eta^2\eta_1^2$, $y = 2A_1\varphi$ mit A_1 = Entfernung des Galvanometerspiegels vom Registrierpapier, $\omega = 2\pi/T_c$ mit T_c = Periode der Erdbebenwellen, $f(t) = 2A_1\varkappa x'''/l$, $z = 1 + \omega^4/D$. $Y_{\max}$ ist der Maximalausschlag des Galvanometers. Zum Schluß folgt ein Beispiel. *A. Michailov* (Moskau).₀

Kodaira, Y.: On the general circulation of the earth's atmosphere. (*Cambridge, England, 3.—9. VII. 1934.*) Proc. 4. internat. Congr. appl. Mech., 204 (1935).

Swann, W. F. G.: The origin of the hardening of cosmic rays in passing through matter. Physic. Rev., II. s. **47,** 250 (1935).

Nimmt man an, daß eine Höhenstrahlpartikel ihre Energie hauptsächlich durch Schauerbildung verliert, so würde der scheinbare Absorptionskoeffizient mit fallender Energie kleiner, wenn die Schauererzeugung stärker als linear mit der Partikelenergie anwächst. Verf. deutet so die „Härtung" der schauererzeugenden Strahlung beim Durchgang durch Materie, wie sie von verschiedenen Seiten festgestellt wurde.

Nordheim (Lafayette, Indiana).